Харківський національний університет внутрішніх справ

О. П. Мелащенко

В. Є. Рог

ВИЩА МАТЕМАТИКА

навчальний посібник

Харків 2019

УДК 51

ББК 22.1я73

Автори:

Мелащенко О.П. **– старший викладач кафедри інформаційних технологій факультету № 4 Харківського національного університету внутрішніх справ;**

Рог В.Є. **- старший викладач кафедри інформаційних технологій факультету № 4 Харківського національного університету внутрішніх справ.**

Рецензенти:

Петров К. Є. **–** д-р. техн. наук, професор, професор кафедри штучного інтелекту, професор кафедри системотехніки ХНУРЕ;

Романова Т.Є. – д-р. техн. наук, професор, професор кафедри системотехніки, кафедри прикладної математики ХНУРЕ.

Рекомендованодля використання в освітньому процесі

Вченою радою Харківського національного університету внутрішніх справ,

Протокол № 7 від 28.05.2019

Мелащенко О. П., Рог В. Є. Вища математика: Навчальний посібник. — Харків, Вид-во Харк. нац.. ун-ту внутр.. справ, 2019. — 100 с.

Зміст

Тема 1. Елементи лінійної алгебри

1.1 Поняття матриці та її види.

Матрицею розміру $\mathbf{m \times n}$ називається сукупність елементів a_{ij}, розміщених у вигляді прямокутної таблиці, що має **m** рядків і **n** стовпців:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Числа a_{ij} називаються *елементами матриці*, а запис $m \times n$ означає її *розмір* (m- кількість рядків матриці, n — кількість стовпців). Наприклад, запис розміру матриці 5×3 означає, що в ній п’ять рядків і три стовпці. Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості її стовпців, то матриця називається *квадратною*.

Дві матриці *рівні між собою*, якщо вони мають однаковий розмір і всі їх відповідні елементи рівні між собою.

Елементи з двома однаковими індексами a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... a_{nn} утворюють *головну діагональ* матриці. Якщо $a_{ij}=a_{ji}$, то матриця називається *симетричною*.

Квадратна матриця, в якої елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а всі інші нулю, називається *одиничною матрицею*:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Нульовою називається матриця, всі елементи якої - нулі.

Матрицю, яку одержують із матриці A заміною її рядків відповідними стовпцями, називають **транспонованою** і позначають A^T. Транспонована матриця має вигляд:

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Коли всі елементи матриці, що містяться по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю, то матриця *називається трикутною.*

Дії над матрицями

1. *Сумою матриць одного й того самого порядку* $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ називається матриця $C=A+B$; $C=(c_{ij})$, будь-який елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць *A і B*: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Приклад: $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ мають розмір 2×2, тому за означенням можна утворити їх суму — матрицю

$$C=\begin{pmatrix} 1+2 & 3+6 \\ 0+(-7) & -2+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Добутком матриці* $A=(a_{ij})$ *на деяке число* α називається така матриця *C*, кожен елемент якої c_{ij} утворюється множенням відповідних елементів матриці *A* на α, $c_{ij}=\alpha a_{ij}$.

Приклад. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha=-2$, $C=\alpha A=\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Для довільних матриць ***A, B, C*** однакових розмірів і довільних чисел **α** та **β** справджуються рівності:

A + B = B + A;

(A + B) +C = A + (B + C);

α(A + B) = αA + αB;

(α + β)A = α A + β A;

(α β)A = α (β A).

3. *Добутком матриці* $A=(a_{ij})$ розміру $m\times p$ на матрицю $B=(b_{ij})$ розміру $p\times n$ називається така матриця $C=AB$ розміру $m\times n$, $C=(c_{ij})$, кожний елемент можна знайти за формулою:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}.$$

В результаті множення дістанемо матрицю розміру $m\times n$.

З означення випливає, що добуток матриць *некомутативний*: $AB\neq BA$. Якщо $\boldsymbol{AB=BA}$, то матриці $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ називаються **комутативними.**

Ранг матриці

Розглянемо матрицю A розміром $m\times n$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рангом матриці А розміром $m\times n$ називається найвищий порядок відмінного від нуля мінора, утвореного з елементів цієї матриці. Зрозуміло, що $rangA=r\leq\min(m,n)$, а найбільший можливий ранг матриці може дорівнювати меншому з чисел m і n.

Елементарними перетвореннями матриці А називаються такі її перетворення:

1) заміна місцями двох рядків або двох стовпців матриці;

2) множення рядка або стовпця матриці на довільне відмінне від нуля число;

3) додавання елементів одного рядка або стовпця до відповідних елементів іншого рядка або стовпця, попередньо помноженого на деяке число.

Теорема. **Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.**

Далі матриці, які мають рівні ранги, називатимемо *еквівалентними* матрицями. Еквівалентні матриці об'єднуватимемо знаком «~» («тильда»).

1.2. Поняття визначника. Засоби обчислення визначників.

Розглянемо спочатку системи рівнянь, в яких кількість невідомих і кількість рівнянь рівні між собою, тобто $m = n$. Нехай, наприклад, $n = m = 2$, тоді маємо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Визначником другого порядку називається вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Приклад.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 10.$$

Якщо $n = m = 3$, то маємо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

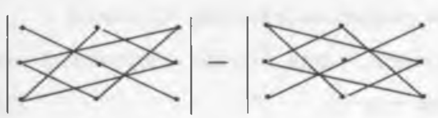
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Визначником третього порядку називається вираз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - \qquad (*)$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для запам'ятовування правила обчислення визначника третього порядку пропонуємо таку схему (правило трикутників):



Позначимо точками елементи визначника, тоді доданки зі знаком «плюс» — це добутки елементів a_{11}, a_{22}, a_{33}, розміщених на *головній діагоналі* визначника, і добутки елементів a_{13}, a_{21}, a_{32} і a_{12}, a_{23}, a_{31}, розміщених у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі. Зі знаком «мінус» беруться доданки, що є добутками елементів a_{13}, a_{22}, a_{31}, розміщених на сторонній діагоналі визначника, та у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні сторонній діагоналі визначника — a_{11}, a_{23}, a_{32} і a_{12}, a_{21}, a_{33}.

Запропонуємо ще одне правило обчислення визначника третього порядку (правило Саррюса).

У початковому визначнику за третім стовпцем запишемо ще раз перший і другий стовпці:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Для знаходження визначника за цим правилом треба утворити зі знаком «плюс» алгебраїчну суму добутків елементів, розміщених на головній діагоналі визначника, і на діагоналях, паралельних їй, а зі знаком «мінус» — добутків елементів, розміщених на сторонній діагоналі, та на діагоналях, паралельних їй.

Визначник:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

рядки якого є стовпцями попереднього визначника, є *транспонованим* щодо визначника (*).

Основні властивості визначників.

1. Значення визначника не змінюється, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями, а стовпці – рядками.
2. Перестановка двох рядків (стовпців) визначника рівносильна множенню його на –1.
3. Якщо визначник має два однакових рядка (стовпця), то він дорівнює нулю.

4. Якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) визначника містять спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

5. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то і сам визначник дорівнює нулю.

6. Якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

7. Якщо кожний елемент деякого рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких один у згаданому рядку (стовпці) має перші з заданих доданків, а інший – другі; елементи, що знаходяться на решті місць, у всіх трьох визначниках одні й ті самі. Записується ця властивість таким чином:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Якщо до елементів деякого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на довільний спільний множник, то значення визначника при цьому не зміниться.

1.3. Мінори та алгебраїчні доповнення. Обернена матриця.

Нехай визначник має n рядків і n стовпців. **Мінором M_{ij}** елемента a_{ij} називається визначник, який дістають з визначника матриці A викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця. Мінор першого порядку — це будь-який елемент визначника.

Приклад. Задано виначник

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & -9 \\ 3 & 9 & 5 \\ 6 & 9 & 8 \end{vmatrix}.$$

Записати M_{12} та M_{33}

Мінори M_{12} та M_{33} другого порядку утворюються з елементів, розміщених на перетині першого рядка та другого стовпця та третього рядка та третього стовпця. Перший індекс означає номер рядка; другий —номер стовпця .

$$M_{12}=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 6 & 8\end{vmatrix},\ M_{33}=\begin{vmatrix}1 & -5\\ 3 & 9\end{vmatrix}.$$

Алгебричним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається відповідний мінор, взятий зі знаком «плюс», якщо сума його індексів парна, і зі знаком «мінус», якщо сума його індексів непарна $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Приклад. Задано виначник

$$\begin{vmatrix}1 & -5 & -9\\ 3 & 9 & 5\\ 6 & 9 & 8\end{vmatrix}.$$ Обчислити A_{12}

$$A_{12}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 5\\ 6 & 8\end{vmatrix}=+(3\cdot 8-6\cdot 5)=24-30=-6$$

Визначник вищого порядку можна обчислити за допомогою визначників нижчого порядку **розкладом за елементами якогось рядка або стовпця**. Зокрема, для визначників третього порядку маємо:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпця на їх алгебричні доповнення.

Приклад. Обчислити визначник шляком розкладання за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix}1 & -5 & -9\\ 3 & 9 & 5\\ 6 & 9 & 8\end{vmatrix},$$

$$\Delta = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (-5) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} (-9) \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (9 \cdot 8 - 9 \cdot 5) + 5 \cdot (3 \cdot 8 - 6 \cdot 5) - 9 \cdot (3 \cdot 9 - 6 \cdot 9) = 240$$

Матриця A^{-1} називається **оберненою** до квадратної матриці A, якщо добуток цих матриць дорівнює одиничній матриці, тобто $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Обернена матриця існує для всякої квадратної матриці A, яка є **невиродженою**, тобто коли визначник матриці $\det A \neq 0$.

Алгоритм знаходження оберненої матриці:

1. Обчислити визначник матриці A. Якщо $\det A \neq 0$, то матриця A має обернену, в іншому випадку оберненої матриці не існує.
2. Обчислити алгебричні доповнення A_{ij} елементів матриці A.
3. Визначити обернену матрицю за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(A^*\right)^T = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

4. Системи рівнянь.

Поняття «обернена матриця» може бути використано для розв`язку матричних рівнянь.

Нехай задане рівняння AX=B, де A і B - задані квадратні матриці порядку n, а X - шукана квадратна матриця того ж порядку. Нехай $\det A \neq 0$. Тоді обчислюємо матрицю A^{-1} і помножимо ліву і праву частини заданого рівняння зліва на A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

Оскільки

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = (A^{-1} \cdot A) \cdot X$$

(згідно асоціативної властивості множення матриць), тоді

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = E \cdot X = X$$

і одержуємо

$$X=A^{-1}\cdot B$$

Приклад. Розв`язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 \qquad = -3 \end{cases}$$

представивши її у вигляді матричного рівняння.

Перепишемо систему у вигляді AX=B, де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Розв`язок матричного рівняння має вигляд $X=A^{-1}B$. Знайдемо A^{-1} шляхом розкладання за елементами третього рядка. Маємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 5 = -2 \neq 0$$

Обчислимо алгебраїчне доповнення елементів цього визначника.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -13$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

Обернена матриця знаходиться за формулою

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\cdot\left(A^{*}\right)^{T} = \dfrac{1}{\det A}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$. Підставимо отримані результати:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}$$

Отже,

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -25+30-9 \\ 5-6+3 \\ 55-78+21 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, тобто $x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=1$.

1.4. Системи лінійних рівнянь (СЛР). Розв'язання систем лінійних рівнянь.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Теорема Крамера.

Розглянемо систему *n* лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Визначник, елементами якого є коефіцієнти при невідомих у даній системі

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

називається **визначником цієї системи**.

Теорема Крамера. **Якщо визначник *D* системи лінійних алгебраїчних рівнянь відмінний від нуля, то ця система має єдиний розв'язок:**

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \ldots,\ x_n = \frac{D_n}{D}$$

Тут D_k — визначник, утворений з визначника *D* системи заміною *k*-го стовпця на стовпець із правих її частин.

Приклад.

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 25, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 17. \end{cases}$$

Обчислимо визначник цієї системи:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 4.$$

Визначник системи відмінний від нуля. Знайдемо тепер визначники $D_k (k = 1, 2, 3)$ і розв'язки системи рівнянь:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 25 & 6 & 7 \\ 17 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 12, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 25 & 7 \\ 1 & 17 & 6 \end{vmatrix} = 8, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 6 & 25 \\ 1 & 4 & 17 \end{vmatrix} = 4;$$

$$x_1 = \frac{12}{4} = 3, \quad x_2 = \frac{8}{4} = 2, \quad x_3 = \frac{4}{4} = 1. \bullet$$

Формули Крамера незручні для практичних обчислень при $n \geq 4$, але вони застосовуються в теоретичних дослідженнях.

Розглянемо тепер систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Розв'язком системи називається сукупність значень невідомих

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ x_n = \alpha_n,$$

що задовольняють усі рівняння системи

Система рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має принаймні один розв'язок, і **несумісною,** якщо вона не має розв'язків.

Система рівнянь називається **визначеною**, якщо вона має лише один розв'язок, і **невизначеною,** якщо вона має безліч розв'язків.

Дві системи рівнянь з однаковими невідомими називаються **рівносильними**, якщо кожний розв'язок однієї системи є розв'язком іншої системи або якщо ці системи рівнянь несумісні.

У результаті еквівалентних перетворень системи рівнянь завжди дістаємо рівносильну систему рівнянь. **До еквівалентних перетворень системи належать:**

1) переставлення місцями рівнянь;

2) множення або ділення рівнянь на число, що не дорівнює нулю;

3) додавання до деякого рівняння іншого рівняння, помноженого на довільне число.

Будь-який метод розв'язування системи m рівнянь з n невідомими передбачає виконання еквівалентних її перетворень, завдяки яким вона зводиться до такого вигляду, що розв'язок уже легко знайти.

Теорема Кронекера—Капеллі

У загальному випадку перш ніж розв'язати систему m рівнянь з n невідомими, важливо знати, чи існують її розв'язки, тобто чи буде вона сумісною. Щоб відповісти на це запитання, розглянемо дві матриці: *головну матрицю A*, складену з коефіцієнтів при невідомих системи рівнянь, і *розширену матрицю* $\overline{A}$, утворену приєднанням до матриці A стовпця вільних членів:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Теорема Кронекера—Капеллі. Для того щоб система m рівнянь з n невідомими була сумісною (мала розв'язок), необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці A дорівнював рангу розширеної матриці $\overline{A}$:

$$\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(\overline{A})=r.$$

Метод Жордана—Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь

Цей метод пов'язаний із виключенням невідомих із системи рівнянь. Розглянемо систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Виключимо з усіх рівнянь, крім одного *i*-го, невідому x_j, вважаючи, що коефіцієнт $a_{ij} \neq 0$. Назвемо цей коефіцієнт *розв'язувальним* елементом. Поділивши почленно все *i*-те рівняння на a_{ij}, дістанемо:

$$\frac{a_{i1}}{a_{ij}}x_1 + \frac{a_{i2}}{a_{ij}}x_2 + \ldots + x_j + \ldots + \frac{a_{in}}{a_{ij}}x_n = \frac{b_i}{a_{ij}}$$

Тепер помножимо рівняння на $-a_{1j}$ і додамо до першого рівняння системи), далі помножимо на $-a_{2j}$ і додамо до другого рівняння системи і т. д. Після того як помножимо (8) на $-a_{mj}$ і додамо до останнього рівняння системи, дістанемо:

$$\begin{cases} (a_{11} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}}a_{1j})x_1 + (a_{12} - \frac{a_{i2}}{a_{ij}}a_{1j})x_2 + \ldots + 0 + \ldots + \ldots + (a_{1n} - \frac{a_{in}}{a_{ij}}a_{1j})x_n = b_1 - \frac{b_i}{a_{ij}}a_{1j} \\ (a_{21} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}}a_{2j})x_1 + (a_{22} - \frac{a_{i2}}{a_{ij}}a_{2j})x_2 + \ldots + 0 + \ldots + (a_{2n} - \frac{a_{in}}{a_{ij}}a_{2j})x_n = b_2 - \frac{b_i}{a_{ij}}a_{2j} \\ \ldots \\ \frac{a_{i1}}{a_{ij}}x_1 + \frac{a_{i2}}{a_{ij}}x_2 + \ldots + x_j + \ldots + \frac{a_{in}}{a_{ij}}x_n = \frac{b_i}{a_{ij}} \\ \ldots \\ (a_{m1} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}}a_{mj})x_1 + (a_{m2} - \frac{a_{i2}}{a_{ij}}a_{mj})x_2 + \ldots + 0 + \ldots + (a_{mn} - \frac{a_{in}}{a_{ij}}a_{mj})x_n = b_m - \frac{b_i}{a_{ij}}a_{mj} \end{cases}$$

У системі рівнянь невідома x_j входить тільки до *i*-го рівняння. Перепозначимо коефіцієнти при невідомих і праві частини системи останьої системи так: $b_{11} = a_{11} - \frac{a_{i1}}{a_{ij}}a_{1j}$, $b_{12} = a_{12} - \frac{a_{i2}}{a_{ij}}a_{1j}, \ldots,$ $b_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{ij}}$, $\ldots,$ $b_{kl} = a_{kl} - \frac{a_{il}}{a_{ij}}a_{kj}$, $\ldots,$

$b_{mn} = a_{mn} - \frac{a_{in}}{a_{ij}}a_{mj}$, $b_k^{*} = b_k - \frac{b_i}{a_{ij}}a_{kj}$.

Тоді система набере вигляду:

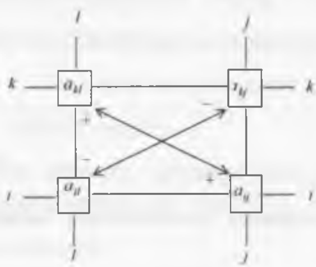
$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + 0 + \ldots + b_{1n}x_n = b_1^* \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + 0 + \ldots + b_{2n}x_n = b_2^* \\ \ldots \\ b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \ldots + x_j + \ldots + b_{in}x_n = b_i^* \\ \ldots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \ldots + 0 + \ldots + b_{mn}x_n = b_m^* \end{cases}$$

Перехід від однієї системи рівнянь до іншої називається *кроком перетворення методу Жордана—Гаусса*.

Розглянемо вираз для коефіцієнта b_{kl} системи рівнянь докладніше:

$$b_{kl} = \frac{a_{kl}a_{ij} - a_{il}a_{kj}}{a_{ij}}, \quad k = 1, 2, \ldots, m; \quad l = 1, 2, \ldots, n.$$

Утворюється він за такою схемою:



Щоб знайти новий коефіцієнт, який міститься на перетині k-го рядка і l-го стовпця, будуємо визначник другого порядку з чотирьох елементів, які містяться на перетині i-го і k-го рядків та l-го і j-го стовпців і обчислюємо його. Поділивши здобуте значення визначника на розв'язувальний елемент a_{ij}, дістанемо новий коефіцієнт b_{kl}. Зауважимо, що за наведеною схемою (на відміну від схеми для знаходження визначника другого порядку) добуток $a_{ij}a_{kl}$ завжди береться зі знаком «+», де б не містилися ці елементи — на головній чи сторонній діагоналі визначника.

Вираз b_{kl} спрощується, якщо a_{ij}=1. Отже, коли в рівнянні є коефіцієнти, що дорівнюють одиниці, їх доцільно брати за розв'язувальні елементи.

Якщо в початковій системі a_{kj} або a_{il} дорівнює нулю, то $b_{kl} = a_{kl}$.

Результат виконання одного кроку за методом Жордана—Гаусса зручно подати у вигляді таблиці:

Виконавши один крок за методом Жордана—Гаусса, тобто виключивши невідому x_l, можна зробити наступний крок і виключити ще одну невідому і т.д. Коли не всі елементи, які розміщені в $(k + 1)$-му і наступних рядках таблиці, дорівнюють нулю, то процедуру за методом Жордана—Гаусса можна продовжити.

Якщо всі елементи в $(k + 1)$-му і наступних рядках таблиці дорівнюють нулю, то процедуру за методом Жордана—Гаусса продовжити неможливо. У цьому разі слід повернутися від таблиці до системи рівнянь. Невідомі, які відповідають стовпцям таблиці з нулями та одиницею, будуть головними, решта невідомих — вільні. З утвореної після k-го кроку системи рівнянь дістаємо загальний розв'язок початкової системи, переносячи доданки з вільними невідомими у праві частини рівнянь.

Метод Гаусса

Метод Гаусса розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь полягає в **послідовному виключенні змінних** і перетворенні системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{10}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{20}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n0} \end{cases}$$

до трикутного вигляду

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = b_{10}; \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = b_{20}; \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad b_{nn}x_n = b_{n0},\ b_{kk} = 1 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Якщо система рівнянь з n невідомими має єдиний розв'язок, то ця система завжди може бути перетворена до трикутного вигляду.

Приклад.

Знайдемо розв'язок системи рівнянь за методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=6, \\ x_1+2x_2-x_3=5, \\ 2x_1-x_2+2x_3=1 \end{cases}$$

Складемо таблицю

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 8 & -11 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \end{array}\right]$$

З останньої матриці отримали наступну систему:

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=6, \\ \quad x_2+2x_3=-1, \\ \qquad 14x_3=-14 \end{cases}$$

Послідовно знайдемо невідомі: $x_3=-1,\ x_2=1,\ x_1=2$.

Контрольні питання.

1. Як виконується добуток матриці на число?
2. Що таке розмірність матриці?
3. Як виконується операція транспонування?
4. Що називається мінором матриці к-го порядку?
5. Що називається алгебраїчним доповненям елемента матриці?
6. Які методи обчислення визначників Ви знаєте?
7. Дайте визначення оберненої матриці.
8. Наведіть формули Крамера.
9. У чому полягає суть метода Гауса?

Завдання для самостійної роботи.

1. Задано матриці A, B, C, D.

Знайти матриці 2A-B, A·B, A·C, D·C. Обчислити визначник матриці A.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

2. Розвязати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -3\end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 7 & -8\end{pmatrix}$$

3. Обчислити обернену матрицю до матриці $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 0\\ 3 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$

4. Розвязати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=9\\ x_1-2x_2+x_3=-2\\ 3x_1+2x_2+2x_3=7\end{cases}$$

а) за формулами Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

Виконати перевірку.

Тема № 2: Елементи векторної алгебри

2.1. Поняття вектора.

Векторною величиною, або вектором (у широкому розумінні) називається будь-яка величина, що має напрям (наприклад, сила, що діє на матеріальну точку).

У геометрії **вектором** (у вузькому розумінні) називається напрямлений відрізок. Напрям відрізка вказується стрілкою. Розрізняють початок і кінець вектора.

Два вектори називаються **рівними** між собою, якщо кожний із них можна дістати паралельним перенесенням іншого.

Рівні вектори є паралельними (колінеарними), мають один і той самий напрям і однакову довжину. Довжина вектора **a** називається також **абсолютною величиною**, або **модулем**, вектора і позначається $|\mathbf{a}|$.

Вектор називається **нульовим** (нуль-вектором), якщо він має нульову довжину, тобто його кінець збігається з початком.

На письмі вектор позначається напівжирним шрифтом.

2. 2. Лінійні операції з векторами.

Щоб знайти суму двох векторів **a** і **b**, сумістимо початок вектора **b** з кінцем вектора **a**.

Сумою a + b векторів **a** та **b** називається вектор, початок якого збігається з початком вектора **a**, а кінець — із кінцем вектора **b** (рис. 1).

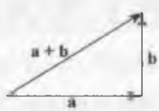


Рис. 1

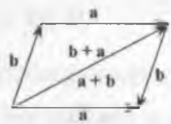


Рис. 2

Додавання векторів комутативне, тобто для довільних векторів **a** і **b** справджується рівність (рис. 2)

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

Додавання векторів асоціативне, тобто для будь-яких векторів **a**, **b**, **c** виконується рівність

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Цю властивість, що випливає з означення суми векторів, унаочнює рис. 3.

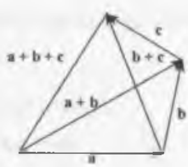


Рис. 3.

Віднімання векторів — операція, обернена до їх додавання. Різниця **b** – **a** векторів **a** і **b** являє собою вектор, початок якого збігається з початком вектора **a**, а кінець — із кінцем вектора **b** (рис. 4).

a + (**b** – **a**) = **b**

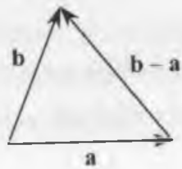


Рис. 4

Для будь-яких векторів **a**, **b** виконуються нерівності:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|, \quad |\mathbf{a}-\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

Розглянемо довільний вектор **a** і вісь x.

Якщо вектор **a** утворює кут φ з віссю x (рис. 5), то **проекцією вектора a** на вісь називається величина $пр_x\mathbf{a} \equiv a_x = |a|\cos\varphi.$

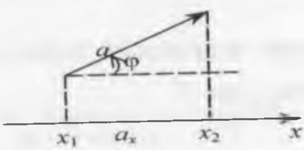


Рис. 5

Якщо x_1 — координата проекції початку вектора, а x_2 — координата проекції кінця вектора на вісь x, то $a_x = x_2 - x_1$.

Нехай вектор **a** має початок у точці $M_1(x_1, y_1, z_1)$, а кінець — у точці $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тоді величини $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$ є **проекціями вектора a на осі** x, y, z. Проекції вектора однозначно визначають вектор. Тому виконується рівність $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$

Очевидно, що проекція на вісь x суми **a** + **b** векторів **a** та **b** дорівнює сумі проекцій на вісь x векторів **a**, **b** (рис. 6).

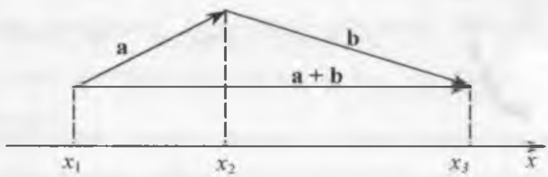


Рис. 6

Справді, виконуються рівності

$$np_x\,\mathbf{a} = x_2 - x_1,\quad np_x\,\mathbf{b} = x_3 - x_2,\quad np_x(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = x_3 - x_1,$$
$$np_x = (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = np_x\,\mathbf{a} + np_x\,\mathbf{b}.$$

Нехай відомі проекції векторів **a** та **b**:

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\},\quad \mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}.$$

Тоді проекція суми векторів **a** + **b** дорівнює сумі відповідних проекцій векторів-доданків $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}$

Добутком вектора a на число λ називається вектор $\lambda\mathbf{a}$, довжина якого дорівнює $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda|\,|\mathbf{a}|$. Вектор $\lambda\mathbf{a}$ колінеарний вектору **a**; має однаковий з ним напрям при $\lambda > 0$ і протилежний напрям при $\lambda < 0$. Якщо $\lambda = 0$ або $\mathbf{a} = 0$, то маємо $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$, тобто добуток є нуль-вектором.

Множення вектора на число має властивість асоціативності та дистрибутивності. Для довільних чисел λ, μ та векторів **a**, **b** справджуються рівності:

1) $\lambda(\mu\mathbf{a}) = \mu(\lambda\mathbf{a}) = (\mu\lambda)\mathbf{a}$;
2) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$;
3) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

Останню рівність унаочнює рис. 7 ($\lambda > 1$).

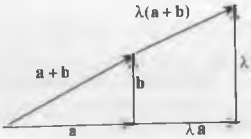


Рис. 7

Ця властивість випливає з подібності трикутників із коефіцієнто подібності λ. З очевидної рівності $np_x(\lambda\mathbf{a}) = \lambda np_x\mathbf{a}$ виплива $\lambda\{a_x, a_y, a_z\} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$

Лема. Будь-який вектор **a** можна єдиним чином подати у вигляді сум трьох векторів, кожний із яких колінеарний одній з осей координат *x, y, z*.

Оскільки виконується рівність $\mathbf{M_1M_2} = \mathbf{M_1M_4} + \mathbf{M_4M_3} + \mathbf{M_3M_2}$ (рис. 8),

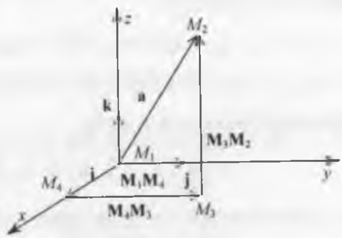


Рис. 8

то вектор **a** можна записати у вигляді $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$

Вектори $a_x\mathbf{i}$, $a_y\mathbf{j}$, $a_z\mathbf{k}$ називаються *компонентами вектора* **a**.

Отже, кожний вектор дорівнює сумі його компонентів за трьома осям координат.

Приклад. Задано два вектора $\vec{a} = \{1,2\}$ и $\vec{b} = \{-1,3\}$. Знайти координа вектора $\vec{a} + \vec{b}$.

Скористаємося формулою $\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2\}$.

Тоді: $\vec{a} + \vec{b} = \{1 + (-1), 2 + 3\} = \{0,5\}$.

Приклад. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, що з'єднує точку A з координатами $\{2,0\}$ та точку B з координатами $\{-1,1\}$.

Позначимо координати точки A як $\{a_1,a_2\}$, координати точки B як $\{b_1,b_2\}$.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеетмає координати $\{a_2-a_1,b_2-b_1\}$. Підставляємо вихідні значення: $\{0-2,1-(-1)\}=\{-2,2\}$. Тобто, $\overrightarrow{AB}=\{-2,2\}$.

Приклад. Довести, що два вектори $\vec{x}=\{2,3\}$ и $\vec{y}=\{4,6\}$колінеарні.Д

Для вирішення необхідно перевірити виконання рівності: $x_1y_2=x_2y_1$. Підставимо задані значения координат: $2\cdot6=3\cdot4$, звідки: $12=12$. Тобто, вектори колінеарні.

Приклад. Задано вектор $\overrightarrow{AB}=\{-1,4\}$ та відомо, що точка B имеетмає координати $(1,4)$. Знайти координати точки A – початку вектора.

Введемо позначення: $\{x_{ab},y_{ab}\}$ – координати вектора $\overrightarrow{AB}$, $\{x_b,y_b\}$ – координати точки B, $\{x_a,y_a\}$ – координати точки A. Необхідно розвязати два рівняння: $x_{ab}=x_b-x_a$; $y_{ab}=y_b-y_a$. Підставимо відомі координати та отримаємо рівняння $-1=1-x_a$; $4=4-y_a$. Розвязавши рваняння, знаходимо $x_a=2$; $y_a=0$. Тобто, точка A має координати $\{2;0\}$.

Якщо відрізок AB поділено точкою C у відношенні $|AC|:|CB|=\lambda$, то координати точки C знаходяться за формулами :

$$X_C=\frac{X_A+\lambda X_B}{1+\lambda};\;\; У_C=\frac{У_A+\lambda У_B}{1+\lambda};\;\; Z_C=\frac{Z_A+\lambda Z_B}{1+\lambda}.$$

Якщо $\lambda=1$, то дістанемо формули для знаходження координат середини відрізка :

$$X_C=\frac{X_A+X_B}{2};\;\; У_C=\frac{У_A+У_B}{2};\;\; Z_C=\frac{Z_A+Z_B}{2}.$$

Приклад . Відрізок AB, де A (7; 2; -3), B (-5; 0; 4), поділений точкою C у відношенні $\lambda=|AC|:|BC|=1:5$. Знайдіть координати точки C.

$$x_C = \frac{7 + \frac{1}{5} \cdot (-5)}{1 + \frac{1}{5}} = 5; \quad y_C = \frac{2 + \frac{1}{5} \cdot 0}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{5}{3}; \quad z_C = \frac{-3 + \frac{1}{5} \cdot 4}{1 + \frac{1}{5}} = -\frac{11}{6}.$$

Отже, $C\left(5;\ \frac{5}{3};\ -\frac{11}{6}\right)$.

2.3. Скалярний добуток векторів, його властивості.

Скалярним добутком двох ненульових векторів називається число, як дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi, \text{ де } \varphi - \text{кут між } \vec{a} \text{ і } \vec{b}.$$

Приклад. Знайти $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = \pi/4$.

Зо формулою скалярного добутка маємо: $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$, де $\varphi = \widehat{\vec{a}\vec{b}}$. Тобто, для нашого прикладу $(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos\pi/4 = 6 \cdot \sqrt{2}/2 = 3\sqrt{2}$.

Властивості скалярного добутку.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $\vec{a} \cdot 0 = 0$
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
4. $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c}$
5. $(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{c} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{c})$
6. $\vec{a} \cdot \vec{a} = (|\vec{a}|)^2$

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ (x_1; y_1; z_1) і $\vec{b}$ (x_2; y_2; z_2) виражається через їх координати за формулою : $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$.

Кут між векторами $\vec{a}$ (x_1; y_1; z_1) і $\vec{b}$ (x_2; y_2; z_2) обчислюється за формулою :

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\;\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Умова перпендикулярності векторів має вигляд :

$$x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2 = 0.$$

Проекцією вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називають число, яке дорівнює добутку модуля вектора $\vec{a}$ на косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\langle(\vec{a},\vec{b})$$

Проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ визначають за формулою

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{x_{\vec{a}}x_{\vec{b}} + y_{\vec{a}}y_{\vec{b}} + z_{\vec{a}}z_{\vec{b}}}{\sqrt{x_{\vec{b}}^{\,2} + y_{\vec{b}}^{\,2} + z_{\vec{b}}^{\,2}}}$$

Косинуси кутів, які утворює вектор $\vec{a}$ (x; y; z) з осями координат, або з базисними векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, де $\vec{i}$ (1; 0; 0), $\vec{j}$(0; 1; 0), $\vec{k}$ (0; 0; 1) визначають за формулами :

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

де α, β, γ - кути, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями OX, OY, OZ.

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ і $\cos\gamma$ називають *напрямними косинусами вектора* $\vec{a}$.

Для напрямних косинусів вектора справджується співвідношення :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Приклад. Дано вектори $\vec{a} = (-2:8:2)$ *та* $\vec{b} = (11:-2:10)$. Знайти:

1. скалярний добуток векторів:
2. проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$
3. кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$

Знайдемо скалярний добуток вектор

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\cdot 11+8\cdot(-2)+2\cdot 10=-18$ Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{-2\cdot 11+8\cdot(-2)+2\cdot 10}{\sqrt{11^2+(-2)^2+10^2}}=-1{,}2$$

За формулою

$$\cos\alpha=\frac{x_{\vec{a}}x_{\vec{b}}+y_{\vec{a}}y_{\vec{b}}+z_{\vec{a}}z_{\vec{b}}}{\sqrt{x_{\vec{b}}^{\ 2}+y_{\vec{b}}^{\ 2}+z_{\vec{b}}^{\ 2}}\cdot\sqrt{x_{\vec{a}}^{\ 2}+y_{\vec{a}}^{\ 2}+z_{\vec{a}}^{\ 2}}}=\frac{-18}{\sqrt{72}\sqrt{225}}=-0.1\sqrt{2}$$

$$\alpha=\arccos(-0.1\sqrt{2})$$

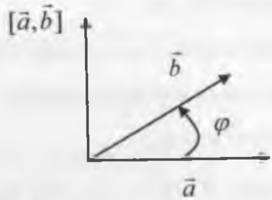
2.4. Векторний та мішаний добуток векторів.

Векторним добутком вектора $\bar{a}$ *на вектор* $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$, якщо:

1) *довжина вектора* $|\bar{c}|=|\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$, де φ — кут між двома векторами;

2) *вектор* $\bar{c}$ *перпендикулярний* до кожного з векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$;

3) *вектор* $\bar{c}$ *спрямований* так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, то поворот вектора $\bar{a}$ до вектора $\bar{b}$ відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.



Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах.

Властивості векторного добутку:

1. $\bar{a}\times\bar{b}=0$, якщо $\bar{a}\neq 0$ і $\bar{b}\neq 0$ — колінеарні вектори.

2. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

3. $(\lambda\vec{a}\times\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$.

4. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

Знайдемо векторні добутки одиничних векторів $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. З колінеарності векторів випливає: $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$. З того, що одиничні вектори збігаються з напрямом осей прямокутної системи координат, маємо:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}.$$

Знайдемо координати вектора $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, якщо $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=$$
$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}$$

або

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Мішаним добутком векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

Модуль мішаного добутку чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$: $V=\dfrac{\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|}{6}$

Умова компланарності трьох векторів $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ має вигляд:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=0.$$

Ураховуючи формули знаходження скалярного і векторного добутків, маємо:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\left(\begin{vmatrix}b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}b_x & b_z\\ c_x & c_z\end{vmatrix}\vec{j}+\right.$$
$$\left.+\begin{vmatrix}b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix}\vec{k}\right)=a_x\begin{vmatrix}b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix}b_x & b_z\\ c_x & c_z\end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix}b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix}.$$

або

$$\vec a\cdot\left(\vec b\times\vec c\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

***Властивості мішаного добутку*:**

1. $\vec a\cdot\left(\vec b\times\vec c\right)=\vec b\left(\vec c\times\vec a\right)=\vec c\left(\vec a\times\vec b\right)$.

2. $\vec a\cdot\left(\vec b\times\vec c\right)=-\vec b\left(\vec a\times\vec c\right)$.

Приклад. Обчислити координати вектора $\vec c=[\vec a,\vec b]$, якщо від

декартові координати: $\vec a=\{2,4,1\}$ и $\vec b=\{3,-1,5\}$.

За формулою векторного добутка маємо:

$$[\vec a,\vec b]=\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}=$$

$$=\vec i\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}-\vec j\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}+\vec k\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=\vec i\cdot\left(4\cdot 5-(-1)\cdot 1\right)-$$

$$-\vec j\cdot\left(2\cdot 5-3\cdot 1\right)+\vec k\cdot\left(2\cdot(-1)-3\cdot 4\right)=21\vec i-7\vec j-14\vec k.$$

Приклад. Обчислити $\vec c=[\vec a,\vec b]$, если $\vec a=\vec i+\vec j$, $\vec b=-2\vec i+\vec j$.

Так як у векторів $\vec a$ та $\vec b$ третя координата не задана, то можна вирази

векторний добуток через визначник 3-го порядку, підставив замість неї ну

$$\vec c=[\vec a,\vec b]=\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\vec i\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}-\vec j\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}+\vec k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=\vec i\cdot 0-\vec j\cdot 0+\vec k\cdot 3=3$$

Приклад. Обчислити мішаний добуток $\left(\vec a,\vec b,\vec c\right)$, якщо $\vec a=-\vec i+2\vec j$, $\vec b=4\vec i-$

, $\vec c=\vec i+5\vec k$.

Так як вектори задані в декартовій системі координат, то мож

скористатися формулою представлення мішаного добутку через визна

3-го порядку, а відсутні координати замінити нулем:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\ 4 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 5\end{vmatrix}=-1\cdot(-15)-2\cdot 20+0\cdot 20=-25.$$

Контрольні питання.

1. Векторні та скалярні величини.
2. Лінійні операції над векторами.
3. Як обчислюються координати вектора через координати його початку і кінця?
4. Яка умова колінеарності двох векторів?
5. Як обчислюється довжина вектора через координати?
6. Яка умова компланарності векторів?
7. Скалярний добуток двох векторів, його властивості.
8. Векторний добуток двох векторів, його властивості.
9. Мішаний добуток двох векторів, його властивості.

Завдання для самостійної роботи.

1. Задано точки $A(k;-1;2), B(1;k;-1), C(-k;1;-3), D(3;-5;k)$.

$A(3, 4, -1)$, $B(5, -1, 1)$, $C(-2, 0, 3)$, $D(-3, -5, 5)$.

Знайти:

а). $\vec{AC}\cdot\vec{AB}$, б). $\vec{AC}\times\vec{AB}$, с). $\cos(\vec{AB}\,\hat{}\,\vec{AC})$, д). $\sin(\vec{AB}\,\hat{}\,\vec{AC})$, е) площу трикутника ACD, ж) об'єм тетраедра ABCD та довжину висоти тетраедра, яка опущена з вершини D

2. У декартовій прямокутній системі координат задано точки

$A_1(1, 4, 1)$, $A_2(3, 2, 1)$, $A_3(1, -1, -3)$, $A_4(10, 7, 4)$.

Знайти:

1) проекцію вектора $\overline{A_1A_2}$ на вектор $\overline{A_1A_4}$;
2) кут між векторами $\overline{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$;

3) площу трикутника $A_1A_2A_3$;

4) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

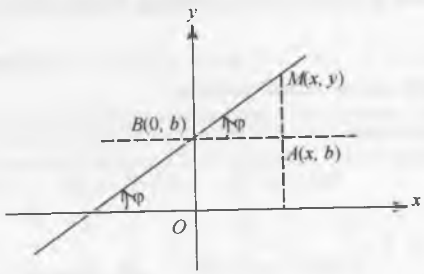
Тема № 3: Аналітична геометрія.

3.1. Рівняння ліній на площині. Різноманітні форми прямої на площин

Нехай на площині задано пряму у прямокутній системі координат x,

Кут φ між віссю Ox і цією прямою називається **кутом нахилу прямої** до о

Тангенс кута нахилу $k = \mathrm{tg}\varphi$ називається **кутовим коефіцієнто** розглядуваної прямої. Якщо ця пряма перетинає вісь Oy у точці B координатами $(0, b)$, то число b називається **початковою ординато** Візьмемо довільну точку $M(x, y)$ на прямій.



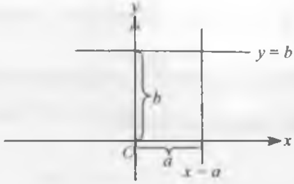
З прямокутного трикутника MAB знаходимо рівняння прямої

$$\frac{y-b}{x} = \mathrm{tg}\varphi,$$

яке можна подати у вигляді $y = kx + b$, де $k = \mathrm{tg}\varphi$.

Якщо розглядувана пряма паралельна осі Oy, то $\varphi = 0{,}5\pi$ і $\mathrm{tg}\varphi$ не іс

При цьому пряма має рівняння виду $x = a$:



Координати x, y будь-якої точки $M(x, y)$, що належить прямій, задовольняють рівняння $y=kx+b$. Якщо пряма $y=kx+b$ проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$, то справджується рівність

$$y_1 = kx_1 + b,$$

Віднімаючи почленно цю рівність від рівності $y=kx+b$, дістаємо рівняння прямої, що проходить через задану точку:

$$y-y_1=k(x-x_1)$$

Нехай дано дві різні точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, де $x_2 \neq x_1$. З рівняння $y-y_1=k(x-x_1)$ випливає вираз для кутового коефіцієнта прямої, що проходить через точки M_1, M_2: $k=\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2}$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ має вигляд: $\frac{y-y_1}{x_1-x_2}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

Приклад. Знайдемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(4, 1)$, $M_2(2, 3)$.

Згідно з $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, маємо: $\frac{y-1}{3-1}=\frac{x-4}{2-4}$, $y=-x+5$, $\operatorname{tg}\varphi=-1$, $\varphi=135°$.

Ця пряма утворює кут 135° з віссю Ox.

Якщо задано вектор $s=\{l, m\}$, паралельний деякій прямій, і точку $M_0(x_0, y_0)$ на цій прямій, то рівняння прямої можна записати у вигляді

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$$

Вектор s називається **напрямним вектором прямої**.

Щоб побудувати графік прямої, достатньо знати дві її різні точки і через них провести пряму. Якщо пряма перетинає осі координат у точках $M_1(a, 0)$,

$M_2(0, b)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то її можна записати рівнянням $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, як

називається **рівнянням прямої у відрізках на осях**.

Приклад. Запишемо рівняння прямої

$$y=-\frac{2}{3}x+2$$

Як рівняння прямої у відрізках на осях.

Значенню $y_1 = 0$ відповідає $x_1 = 3$. При $x_2 = 0$ знаходимо $y_2 = 2$. Отж

шукане рівняння прямої подається у вигляді

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1.$$

Пряма перетинає вісь x у точці з координатою $x = 3$, а вісь y — у точці

координатою $y = 2$.

Розглянемо дві прямі, які задано рівняннями

$$y=k_1x+b_1\ ,\ y=k_2x+b_2\ .$$

Якщо прямі паралельні, то вони мають однакові кути нахилу: $k_1=k_2$.

Якщо прямі взаємно перпендикулярні $k_2=-\frac{1}{k_1}$.

Приклад. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M=\{1$

перпендикулярно до прямої $x+2y+3=0$.

Шукана пряма є нормаллю до заданої прямої, тому для розв'язання мож

застосувати рівняння в канонічній формі. Для ношого прикладу: $m=A=$

$n=B=2$. $\{x_0,y_0\}$ – координати заданної точки, тобто $x_0=1$; $y_0=$

Подставляя значения в формулу $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$, отримаємо: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-}{}$

Шукане рівняння має вигляд $2x-y=0$.

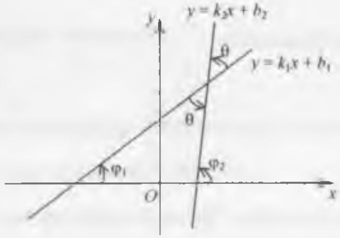
3.2. Кут між прямими.

Якщо прямі не паралельні, то вони перетинаються в точці M(

координати якої є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} y=k_1x+b_1, \\ y=k_2x+b_2. \end{cases}$$

Нехай θ — кут між цими прямими:



Згідно з рисунком, маємо: $\varphi_2 = \varphi_1 + \theta$ (зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним). Отже,

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_2\ \operatorname{tg}\varphi_1} = \frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}.$$

Формулу $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$ застосовують для знаходження кута між двома прямими, заданими рівняннями виду $y = kx + b$

Приклад. У трикутнику з вершинами $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(2, 4)$ знайти кут α при вершині A, а також рівняння висоти CD і медіани BM .

Знайдемо кутові коефіцієнти прямих AB, AC:

$$k_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-1}{5-1} = \frac{1}{4},\ k_2 = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{4-1}{2-1} = 3;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1} = \frac{3-\frac{1}{4}}{1+3\cdot\frac{1}{4}} = \frac{11}{7}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{11}{7}$$

Пряма CD перпендикулярна до прямої AB. Її кутовий коефіцієнт $k_3 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{4}$, а відповідне рівняння

$$y - 4 = -4(x - 2).$$

Точка M поділяє відрізок AC пополам. Отже,

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2},\ y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}.$$

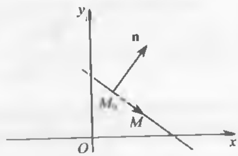
Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $B(5,$

$M\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$.

Скористаємося формулою $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$,

$$\frac{y-2}{\frac{5}{2}-2}=\frac{x-5}{\frac{3}{2}-5},\text{ або } y=-\frac{1}{7}x+\frac{19}{7}$$

Розглянемо на площині прямокутну систему координат x, y і знайдем рівняння прямої, коли відомий вектор її нормалі $\mathbf{n}=\{A,B\}$ і задано точ $M_0(x_0, y_0)$ на цій прямій. Нехай $M(x, y)$ — довільна точка шуканої прямої.



За умовою вектор $\mathbf{M}_0\mathbf{M}=\{x-x_0\ ,\ y-y_0\}$ перпендикулярний вектора $\mathbf{n}=\{A,B\}$. Тому їх скалярний добуток $\mathbf{n}\mathbf{M}_0\mathbf{M}=0$. Звідси мае рівняння

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,$$

або $Ax+By+C=0$, де $C=-Ax_0-By_0$.

Це рівняння називається **загальним рівнянням прямої**.

Коефіцієнти A, B при x, y у загальному рівнянні прямої є проекціями координатні осі вектора її нормалі **n**.

Розглянемо частинні випадки рівняння $Ax+By+C=0$, де A, B

C – постійні коефіцієнти, причому A та B не можуть перетворюватися

нуль одночасн $\left(A^2+B^2\right)\neq 0$. Частинні випадки цього рівняння:

1. $Ax+By=0$ - пряма проходить через початок координат.

2. $Ax+C=0$ - пряма паралельна осі Оу.

3. $By+C=0$ - пряма паралельна осі Ох.

4. $Ax=0$ - пряма співпадає з віссю Оу.

5. $By=0$ - пряма співпадає з віссю Ох.

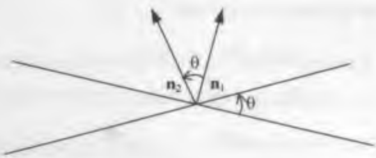
3.3. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.

Дві прямі задано їх загальними рівняннями:

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Точку перетину $M(x, y)$ цих прямих знаходимо, розв'язуючи задану систему рівнянь, оскільки координати x, y точки M задовольняють одночасно обидва ці рівняння.

Кут θ між даними прямими дорівнює куту між їх нормалями $\mathbf{n}_1=\{A_1, B_1\}$, $\mathbf{n}_2=\{A_2, B_2\}$:



Отже, маємо такі залежності: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$ — умова паралельності прямих.

Якщо прямі збігаються, то їх коефіцієнти пропорційні:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

$A_1A_2+B_1B_2=0$ — умова перпендикулярності прямих.

Скориставшись формулою скалярного добутку векторів, знайдемо кут θ:

$$\cos\theta = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Приклад. Маємо рівняння сторін трикутника:

$$x - 2y + 2 = 0 (AB);$$

$$2x - y - 1 = 0\ (AC);$$

$$x + y - 5 = 0\ (BC).$$

Знайдемо рівняння його висоти, проведеної з вершини C.

Складемо рівняння пучка променів, які проходять через вершину C:

$$2x - y - 1 + \lambda(x + y - 5) = 0.$$

Далі за умовою перпендикулярності прямих до AB маємо:

$$(2 + \lambda)\cdot 1 + (-1 + \lambda)\ (-2) = 0.$$

Звідси знаходимо значення $\lambda = 4$ і рівняння висоти $2x + y - 7 = 0$.

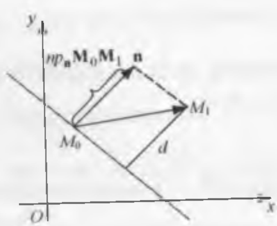
3.4. Відстань від точки до прямої

Дано загальне рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0 \qquad (*)$$

і точку $M_1(x_1, y_1)$. Знайдемо відстань d від точки M_1 до прямої (*). Візьме точку $M_0(x_0, y_0)$ на цій прямій.

Тоді відстань від точки M_1 до прямої дорівнює проекції вектора $\mathbf{M_0M_1}$ вектор нормалі $\mathbf{n} = \{A, B\}$.



Записуємо аналітичний вираз для шуканої відстані:

$$d = |np_{\mathbf{n}}\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1| = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Оскільки $-Ax_0 - By_0 = C$, то остаточно маємо:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Приклад. Обчислити відстань d від точки $M_1(5, 3)$ до прямої $3x + 4y + 3 = 0$.

За формулою $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ знаходимо

$$d = \frac{|3\cdot 5 + 4\cdot 3 + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 6.$$

Нехай маємо загальні рівняння двох прямих, що перетинаються:

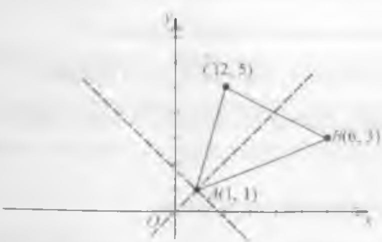
$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Якщо точка $M(x, y)$ лежить на бісектрисі кутів, утворених прямими заданими рямими, то вона однаково віддалена від цих прямих, тобто виконується рівність:

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Приклад. Знайти рівняння бісектриси AD трикутника з вершинами $A(1, 1)$, $B(6, 3)$, $C(2, 5)$.

Побудуємо заданий трикутник:



Згідно з $\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ записуємо рівняння двох бісектрис

$$\frac{2x-5y+3}{\sqrt{2^2+(-5)^2}}=\pm\frac{4x-y-3}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}.$$

Звідси маємо:

$$\frac{2x-5y+3}{\sqrt{29}}-\frac{4x-y-3}{\sqrt{17}}=0,$$

Контрольні питання.

1. Загальне рівняння прямої ?
2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом ?
3. Рівняння прямої, яка проходить через дві точки.
4. Запишіть канонічне рівняння прямої.
5. Рівняння прямої, яка проходить через дану точку з заданим нормальним вектором.
6. Рівняння прямої у відрізках на осях.
7. За якою формулою обчислюється кут між двома прямими ?
8. Умова паралельності двох прямих ?
9. Умова перпендикулярності двох прямих ?
10. За якою формулою знаходиться відстань від точки до прямої?

Завдання для самостійної роботи.

1. Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо $y = 3x + 5$ — рівняння гіпотенузи, A (4, – 1) — вершина прямого кута.

2. Дано вершини трикутника A (4; 6), B (– 4; 0), C (– 1; – 4). Скласти рівняння: а) трьох його сторін; б) медіани, проведеної з вершини C; в) бісектриси кута B; г) висоти, опущеної з вершини A.

3. Дано трикутник з вершинами в точках $A\left(-\frac{1}{7}, -\frac{3}{28}\right)$, $B(4, 3)$, $C(2, -1)$. Обчислити довжини його висот.

4. З точок перетину прямої $3x+5y-15=0$ з осями координат встановлено перпендикуляри до цієї прямої. Знайти їх рівняння.

5. Дано дві вершини трикутника *A* (– 6; 2), *B* (2; – 2) і *H* (1; 2) — точку перетину його висот. Обчислити координати третьої вершини.

6. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку (2; – 1) і утворює з віссю *Ox* удвічі більший кут, ніж кут, що його утворює з тією самою віссю пряма $x-3y+4=0$.

7. Скласти рівняння сторін квадрата, якщо *A*(2; – 4) — його вершина, *M*(5; 2) — точка перетину діагоналей.

8. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо *A*(3; 5), *B*(6; 1) — його вершини, *M*(4; 0) — точка перетину медіан.

9. Через точку *A*(5; 2) провести пряму, що відтинає рівні відрізки на осях системи координат.

Тема № 4: Вступ до математичного аналізу

4.1. Послідовність. Границя послідовності.

Функцією $y = f(x)$ називається така відповідність між множинами *D* і *E*, за якої кожному значенню змінної *x* відповідає одне й тільки одне значення змінної *y*.

При цьому вважають, що:

x — незалежна змінна, або аргумент;

y — залежна змінна, або функція;

f — символ закону відповідності;

D — область визначення функції;

E — множина значень функції.

Розрізняють три способи завдання функції: аналітичний, графічний табличний.

Множина всіх значень аргументу, для яких можна обчислити значен функції, називається *природною областю визначення функції*. Облас визначення може бути заданою; у цьому випадку вона залежить також в умови задачі.

Функція $y = f(x)$ називається *парною* (*непарною*), якщо для будь-якого x D виконується умова $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

Функція буде ні парною, ні непарною, якщо для $x \in D$, $f(-x) \neq \pm f(x)$.

Функція $y = f(x)$ називається *періодичною*, якщо для $x \in D$ виконуєть умова $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$, де число T — період функції.

Функція $y = f(x)$ називається *монотонно зростаючою* (*спадною*) на множи D, якщо для всіх $x \in D$ більшому значенню аргументу відповідає біль (менше) значення функції, тобто $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)(f(x_2) < f(x_1))$.

Елементарні функції:

1) степенева $y = x^{\alpha}$;

2) показникова $y = a^{x}$, $a > 0$, $a \neq 1$;

3) логарифмічна $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

4) тригонометричні: $y = \cos x$; $y = \sin x$; $y = \mathrm{tg} x$; $y = \mathrm{ctg} x$;

5) обернені тригонометричні: $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \mathrm{arctg} x$; $y = \mathrm{arcctg} x$.

Числова функція $y = f(n)$, область визначення якої є множ натурального ряду чисел, називається *числовою послідовністю*, або про послідовністю, і позначається $y = x_n$, надалі писатимемо $x_n = f(n)$, $n \in N$.

Значення $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$, ..., $x_n = f(n)$, ... називаються *члена послідовності*. Послідовність вважається заданою, якщо задано *n*-й чл послідовності.

Число a називається *границею послідовності* x_n, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, яке б мале воно не було, існує номер N такий, що для всіх номерів $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Позначення $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ або $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Послідовність називається *збіжною*, якщо вона має границю (скінченну). Послідовність, яка не має границі, називається *розбіжною*.

4.2. Нескінченно малі та нескінченно великі величини.

Послідовність α_n називається *нескінченно малою величиною* (*н. м. в.*), якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Теорема 1. **Сума двох н.м.в. є н. м. в.**

Теорема 2. **Добуток обмеженої величини на н.м.в. є н.м.в.**

Теорема 3. **Добуток двох н.м.в. є н.м.в.**

Теорема 4. **Для існування границі a послідовності x_n необхідно і достатньо, щоб послідовність $\alpha_n = x_n - a$ була н.м.в.**

Послідовність x_n називається *нескінченно великою величиною* (н.в.в.), якщо для будь-якого числа $0 < M < +\infty$, яке б велике воно не було, існує номер N, такий, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > M$.

Якщо члени н.в.в., починаючи з деякого номера, всі додатні, то позначають $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$; якщо від'ємні, то — $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, а якщо різних знаків, то — $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Теорема. **Зв'язок між н.в.в. і н.м.в.**

1. Якщо α_n — н.м.в. і $\alpha_n \neq 0$, то обернена до неї послідовність $y_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$ буде н.в.в., і навпаки.

2. Якщо y_n — н.в.в., то обернена до неї $\alpha_n = \dfrac{1}{y_n}$ — н.м.в.

Теорема. **Якщо існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то:**

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c y_n = c \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ при $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

4.3. Поняття границі функції. Властивості границь.

Границею функції $y = f(x)$ при x, що прямує до a, називається число якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке що для всіх x, я задовольняють нерівність

$$0 < |x - a| < \delta,$$

випливає

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Позначають - $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Число A називається **правосторонньою (лівосторонньою) границ функції** $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для будь-якого, достатньо малого, чис $\varepsilon > 0$ існує такий правосторонній (лівосторонній) окіл точки x_0, що для вс x, що задовольняють умові $x_0 < x < x_0 + \delta$ $(x_0 - \delta < x < x_0)$ виконуєть нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Правосторонню границю A_1 функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$ позначають

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A_1$$

і лівосторонню границю A_2 функції при $x \to x_0 - 0$ позначають

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A_2.$$

Якщо в точці x_0 існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, тоді правосторон лівостороння границі функції $f(x)$ рівні і дорівнюють A, тоб

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = A.$$

Якщо існують границі $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = A$ і $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = B$, а C - постійна, то:

$$\lim_{x \to x_0} C = C;$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \pm \lim_{x \to x_0} f_2(x);$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f_1(x) \cdot f_2(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f_2(x);$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(Cf(x)\right) = C \lim_{x \to x_0} f(x);$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x)\right)^n = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^n$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)} \text{ за умови } \lim_{x \to x_0} f_2(x) = B \neq 0$$

Для функції $y = f(x)$ неперервної в точці x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0);$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right).$$

Всі елементарні функції неперервні в області їх визначення.

Для будь якого $C \neq 0$ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{C}{f(x)} = \pm 0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$;

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{C}{f(x)} = \pm\infty$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm 0$.

Деякі важливі, часто використовувані границі носять спеціальні назви:

а) перша визначена (чудова) границя $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Приклад. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$

Приклад. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{1 - \sin x/2}{(\pi - x)^2} = \left[\frac{0}{0}\right].$

Для того щоб скористатися першою чудовою границею, потрібно виконати таку заміну змінної x, щоб нова змінна прямувала до нуля, наприклад $\pi - x = y$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{(\pi-x)^2}=\begin{vmatrix}\pi-x=y\\ x=\pi-y\\ x\to\pi\\ y\to 0\end{vmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos\frac{y}{2}}{y^2}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\frac{y}{4}}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{y}{4}\right)}{16\left(\frac{y}{4}\right)^2}=\frac{1}{8}.$$

Приклад

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\begin{vmatrix}1-x=y\\ x=1-y\\ x\to 1\\ y\to 0\end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{2}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

б) друга визначена (чудова) границя $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1}=\left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{2x-1}=[1^{\infty}]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{2x}\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\frac{e^{3\cdot 2}\cdot 1}{e^{-2\cdot 2}\cdot 1}=e^{10}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{\sin 2x}{x\sin 2x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left((1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right)^{\frac{\sin 2x}{x}}=\left|\begin{array}{l}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\xrightarrow[x\to 0]{}e\\ \dfrac{\sin 2x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}2\end{array}\right|=e^{2}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(2x+1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot 2x\cdot 5x}{5x\cdot\ln(2x+1)\cdot 2x}=\left|\begin{array}{l}\dfrac{\sin 5x}{5x}\xrightarrow[x\to 0]{}1\\ \dfrac{2x}{\ln(2x+1)}\xrightarrow[x\to 0]{}1\end{array}\right|=\frac{5}{2}.$$

Наслідки:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}.$$

Шкала еквівалентних нескінченно малих величин

1 $\sin x\sim x,\quad x\to 0.$

2. $\ln(1+x)\sim x,\ \log_a(1+x)\sim(\log_a e)x,\ \ x\to 0.$

3. $e^{x}-1\sim x,\ a^{x}-1\sim x\ln a,\ x\to 0.$

4. $(1+x)^{\mu}-1\sim\mu x,\ x\to 0.$

5. $\arcsin x \sim x,\ x \to 0.$

6. $\operatorname{tg} x \sim x,\ x \to 0.$

7. $\operatorname{arctg} x \sim x,\ x \to 0.$

Розкриття невизначених виразів типу $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty - \infty]$ *для алгебраїчних функцій*

При виконанні граничного переходу у виразах типу $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f($

коли порушуються умови теореми про граничний перехід п арифметичних операціях, розв'язання задачі у ряді випадків зводиться аналізу невизначених виразів виду $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty - \infty]$.

Розглянемо деякі загальні рекомендації щодо дослідження так невизначених виразів, обмежуючись тільки алгебраїчними функціями.

1. Невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ для раціональних функцій

Многочлен $P_n(x)$ називається *упорядкованим*, якцо

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

Теорема (Безу). **Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен тип $-\ a$ дорівнює значенню многочлена при $x = a$, тобто $P_n(a)$.**

Наслідок. Якщо число a — корінь многочлена $P_n(x)$, тобто $P_n(a) = 0$, многочлен $P_n(x)$ ділиться без остачі на двочлен $x - a$.

Приклад. Розкласти на множники $P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 5$. Оскіл $P_3(1) = 0 \Rightarrow x = 1$ — корінь $P_3(x) \Rightarrow P_3(x)$ ділиться без остачі на x

Виконуючи ділення многочленів, дістаємо:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 2x^2 + 6x - 5 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-\ x^3 - x^2 \qquad\qquad & x^2 - x - 5 \\ \cline{1-1}
-x^2 + 6x \qquad & \\
-\ -x^2 + x \qquad & \\ \cline{1-1}
5x - 5 & \\
-\ 5x - 5 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Отже,

$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 5 = (x-1)(x^2 - x + 5).$$

Розглянемо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$, де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — такі многочлени, що $P_n(a)=0$, $Q_m(a)=0$.

За наслідком з теореми Безу чисельник і знаменник діляться без остачі на $x-a$, тобто чисельник і знаменник мають спільний множник $x-a$. Отже, дістаємо:

$$\lim_{x\to a}\frac{P_n(a)}{Q_m(a)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)P_{n-1}(x)}{(x-a)Q_{m-1}(x)} = \lim_{x\to a}\frac{P_{n-1}(x)}{Q_{m-1}(x)}.$$

Степінь многочленів як у чисельнику, так і в знаменнику зменшився на одиницю. Якщо після виконання нового граничного переходу знову буде невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, то наведений алгоритм повторюють.

Зауважимо, що скорочення дробу на множник $x-a$ під знаком границі можливе, бо за означенням границі функції змінна x як завгодно близька до числа a, але $x \neq a$.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2+6x-5}{x^2-1}$

Якщо підставимо замість x число 1 в вираз, що стоїть під знаком границі, одержимо $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, тому спочатку розкладемо на множники чисельник і знаменник:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+6x-5}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-x+5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+5}{x+1} = \frac{1-1+5}{1+1} = \frac{5}{2}.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}$.

Якщо підставимо замість x число 4 в вираз, що стоїть під знаком границі, одержимо $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, тому спочатку розкладемо на множники чисельник і знаменник:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-1}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 4}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 4}(x-2)}=\frac{4-1}{4-2}=$$

Отже, невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ при $x\to a$ для раціональних фун розкривається діленням многочленів у чисельнику і знаменнику на двочлен *a*.

2. Невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ для ірраціональних функцій

Для розв'язування задач у цьому випадку рекомендується звільнитись від тих ірраціональних множників у чисельнику і знаменнику дробового виразу, які перетворюються на нуль при виконанні граничного переходу. Для звільнення від радикалів використовують формули скороченого множення, заміну змінної та інші штучні прийоми.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

Границя чисельника і знаменника при $x\to 5$ дорівнює 0. Помнож чисельник і знаменник на спряжений чисельнику множник $\sqrt{x-1}+2$, маєм

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}x=t^6\\ x\to 1\\ t\to 1\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$.

Границя чисельника і знаменника при $x \to 6$ дорівнює 0. Помножимо чисельник і знаменник на спряжений знаменнику множник $\sqrt{x+3}+3$, маємо:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}{\left(\sqrt{x+3}-3\right)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}{x+3-9}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}{x-6}=\lim_{x\to 6}\left(\sqrt{x+3}+3\right)=3+3=6.$$

3. Невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

У цьому випадку і чисельник, і знаменник рекомендується поділити на найбільший степінь змінної, що входить як до знаменника, так і до чисельника.

Приклад.

Безпосередня підстановка дає невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Для обчислення границі цієї функції треба чисельник і знаменник поділити на $x\sqrt{x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}+x+1}{2\sqrt{x^3+x}-10x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x\sqrt{x}+x+1}{x\sqrt{x}}}{\dfrac{2\sqrt{x^3+x}-10x}{x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}{2\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{10}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{2}.$$

(при $x\to\infty$ доданки $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{x\sqrt{x}}$, $\frac{1}{x^2}$ - величини нескінченно малі і, отже, їх границі дорівнюють нулю).

Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x+1}{6x^2-4x-2}$.

Безпосередня підстановка дає невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Для обчислення границі цієї функції треба чисельник і знаменник поділити на x^2 :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x+1}{6x^2-4x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{6-\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(6-\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}=\frac{5}{6}.$$

(при $x \to \infty$ доданки $\frac{6}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{4}{x}$ і $\frac{2}{x^2}$ - величини нескінченно малі, отже, їх границі дорівнюють нулю).

4. Невизначеність $[\infty - \infty]$

Цей тип невизначеності зводиться до невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, наприклад, зведенням виразу до спільного знаменника, множенням на спряжений вираз.

Приклад.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=[\infty-\infty]=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}-\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=[\infty-\infty]=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{2}{1+1}=1.$$

4.4 Поняття неперервності функції.

Неперервність функцій.

Функція $y=f(x)$ називається **неперервною в точці x_0** функцією, якщо ця функція f визначена в точці x_0 і для кожного (достатньо малого) числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$, таке що при $|x-x_0|<\delta$ виконується $|f(x_0)-f(x)|<\varepsilon$ або $f(x)$ — **неперервна в точці x_0**, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Функція $y=f(x)$ називається **неперервною в точці x_0, якщо**

1) $f(x)$ визначена в точці x_0;

2) границя зліва в точці x_0 дорівнює границі справа в цій точці і дорівнює значенню в ній функції :

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Функція $y = f(x)$ ***неперервна на проміжку*** (a, b), якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Функція $y = f(x)$ ***неперервна на відрізку*** $[a, b]$, якщо вона неперервна на проміжку (a, b) і неперервна в точці $x = a$ справа і в точці $x = b$ зліва.

Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці x_0 справа (зліва)***, якщо

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)\right).$$

Властивості неперервних функцій

Теорема Нехай функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ — неперервні на інтервалі (a, b). Тоді їх наведені далі комбінації також неперервні:

1) $f(x) \pm g(x)$; 3) $\text{const}\, g(x)$;

2) $f(x)\, g(x)$; 4) $f(x) / g(x)$, $g(x) \neq 0$.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в будь-якій точці x_0 і $u = F(y)$ неперервна в точці $f(x_0)$, то їх композиція $f \circ F$ — складена функція і $u = F(f(x))$ — неперервна в точці x_0.

Розриви функції

Функція $y = f(x)$, яка не є неперервною в точці x_0, називається ***розривною*** в цій точці.

Можливі варіанти розриву функцій в точці

1. Якщо для функції $f(x)$ в точці x=a хоч одна з односторонніх границь функції $f(x)$ в точці x=a нескінченна або не існує, то кажуть, що в точці x=a функція $f(x)$ має розрив другого роду.
2. Якщо для функції $f(x)$ в точці x=a існують скінченні односторонні границі функції $f(x)$ в точці x=a, але ці границі не рівні між собою, то нескінченна або не існує, то кажуть, що в точці x=a функція $f(x)$ має неусувний розрив першого роду, або скінченний стрибок.
3. Якщо для функції $f(x)$ в точці x=a

а) існують скінченні односторонні границі функції $f(x)$ в точці x=a;

б) ці односторонні границі рівні між собою, тобто існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$;

в) границя функції $f(x)$ в точці x=a не дорівнює значенню функції в цій точці, тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

то кажуть, що в точці x=a функція $f(x)$ має усувний розрив першого роду.

Методика дослідження функції y = f(x) на неперервність

1. Знаходимо точку x_0 — «підозрілу» на розрив. Це може бути точка, в якій функція невизначена або змінює закон визначеності.

2. Визначаємо інтервали неперервності функції.

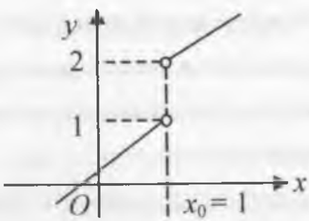
3. Обчислюємо

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x), \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

4. Робимо висновок згідно з теоремами (якщо такі границі існують), або використовуючи означення точок розриву.

Приклад.Дослідити на неперервність функцію

$$y = \begin{cases} x, & x \le 1; \\ x+1, & x > 1. \end{cases}$$



1. Точка $x_0 = 1$ є «підозрілою» на розрив, оскільки в ній функція змінює закон визначеності (на проміжку $(-\infty; 1)$ маємо $y = x$, на проміжку $(1. +\infty)$ — іншу залежність: $y = x + 1$).

2. Функція неперервна на проміжках $(-\infty; 1)$ і $(1; +\infty)$.

3. Знаходимо

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=1, \quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=2.$$

4. $1\neq 2$, тому за означенням функція $y=\begin{cases} x, & x\leq 1; \\ x+1, & x>1 \end{cases}$ має в точці $x=1$ неусувний розрив 1-го роду.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію

$$y=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0; \\ 1 & , x=0. \end{cases}$$

1. Точка $x_0 = 0$ є «підозрілою» на розрив, оскільки в ній функція змінює закон визначеності.

2. $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ — множина, де функція неперервна.

3. Знаходимо

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x}=1; \qquad \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x}=1.$$

$1 = 1 =1$ — функція неперервна в точці $x_0 = 0$ за означенням неперервної функції. Отже, інтервалом неперервності функції $y=f(x)\in(-\infty;\ \infty)$.

4.3. Основні теореми про неперервні функції.

Теорема . (Больцано-Коші). Нехай функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і на кінцях його набуває значень різних знаків. Тоді на інтервалі $(a; b)$ знайдеться точка c, в якій функція перетворюється на нуль.

Теорема (Коші). Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і на його кінцях набуває різних значень. Позначимо $f(a)=A$ і $f(b)=B$. Тоді при будь-якому C: $A < C < B$ знайдеться точка c із $[a, b]$, така що $f(c) = C$.

Теорема (Вейєрштрасса). Якщо функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на деякому відрізку $[a, b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Теорема (Вейєрштрасса). Функція $y = f(x)$, неперервна на відрізку $[a, b]$, досягає на ньому свого найбільшого та найменшого значення.

Теорема (Кантора). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона рівномірно неперервна на ньому.

Контрольні питання

1. Яка функція називається неперервною в точці?
2. Дайте класифікацію розривів функцій.
3. Сформулюйте основні теореми про неперервні функції.

Завдання для самостійної роботи.

1. Знайти границі

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$.

5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^3+17x^2+48x+45}{3x^3+14x^2+3x-36}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+3x^2-12x+7}{x^4-x^3-x+1}$.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}$.

8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^3+5x^2+x-1}{x^4+x^3+x+1}$.

9. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^2+1}$.

10. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^3+2x+3}{x^3-x^2+2}$.

11. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^5-3x^2+4}{x^4+x^2+2}$.

12. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4+2x^3-1}{x^3+x^2+3}$.

13. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{3x^3+x-1}$.

14. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-x^3}{x^2-x+4}$.

15. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$.

16. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$.

17. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$.

18. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{2-3x}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+1}\right)^{4x-3}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-2x}{1-2x}\right)^{1-4x}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2-x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2x^2}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin x}{x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{4x^2}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}4x}{\sin 3x}$.

2. Знайти границі за допомогою еквівалентних нескінченно малих функцій.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^3-2x^2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{\mathrm{tg}2x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\mathrm{tg}4x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x^3+2x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}4x}{x^2-2x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 5x}{2x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\mathrm{arctg}3x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+2x^2\right)}{\sin^2 3x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\mathrm{tg}5x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-5x+6}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 7x}{x^2}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{3x^2}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}3x}{\ln(1+x)}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{\mathrm{tg}2x}$.

3.Знайти область визначення функцій $f(x)=\sqrt[4]{9-x^2}+\sqrt{2\cdot x-6}$ $f(x)=\frac{x-2}{2x-1}$,

$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x-1}$, $f(x)=\frac{x-2}{\cos 2x}$

4. Знайти і класифікувати точки розриву функції $f(x)=5^{\frac{1}{x-3}}$

5. Дослідити функції на неперервність і побудувати графіки.

1. $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1, \\ x^2+2, & -1\le x<1, \\ 2x, & x\ge 1. \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0, \\ (x+1)^2, & 0<x\le 2, \\ -x+4, & x>2. \end{cases}$

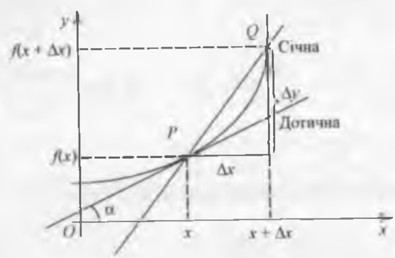
Тема № 5: Диференційне числення

5. 1. Похідна та її обчислення.

Нехай $y = f(x)$ є неперервна функція аргументу x, визначена на інтервалі (a, b). Візьмемо деяке значення незалежної змінної x і надамо її деякого *приросту* Δx. Тоді функція $y = f(x)$ набуде приросту

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \text{ (рис. 1).}$$

Відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приросту Δy функції $y = f(x)$ до приросту Δx незалежної змінної x називається **диференціальним відношенням:** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$



Відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ є тангенсом кута нахилу січної до осі Ox. При $\Delta x \to 0$ січна прямує до дотичної в точці P. Тангенсом кута α нахилу дотичної до осі Ox при цьому буде границя відношення

$$\text{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Функція $y = f(x)$ називається **диференційовною в точці** $x = x_0$, якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Значення границі при цьому називається *похідною функції* $y = f(x)$ *у точці* x_0 і позначається

$$y', \ y'_x, \ \frac{dy}{dx}, \ f'(x), \ \frac{df(x)}{dx}$$

Похідною функції $y = f(x)$ *за аргументом* x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням* цієї функції.

Геометричний зміст похідної

Дотичною до кривої L *у точці* M називається граничне положення MN січної MM_1 при прямуванні точки M_1 по кривій L до точки M.

Похідна $f'(x)$ чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції у точці з абсцисою x. У цьому полягає геометричний зміст похідної.

Механічний зміст похідної

Якщо точка M рухається рівномірно, то $V_{ср}$ є величина стала, і її беруть за швидкість точки. Для нерівномірного руху точки очевидно, що для достатньо близьких значень Δt до нуля середня швидкість точки M буде близька до її швидкості у момент часу t. Тому за точне значення швидкості точки M у момент часу t беруть величину

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

яка є швидкістю зміни функції $x = f(t)$ у точці. У цьому полягає механічний зміст похідної.

Основні правила диференціювання

Теорема 1. Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо $y = c$, де $c = \text{const}$, то $y' = 0$.

Теорема 2. Похідна алгебраїчної суми скінченної кількості диференційовних функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій: $(u(x)\pm v(x))' = u'(x)\pm v'(x)$.

Теорема 3. Похідна добутку двох диференційовних функцій дорівнює добутку першого множника на похідну другого плюс добуток другого множника на похідну першого:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Теорема 4. Сталий множник можна виносити за знак похідної:

$$(cu)' = cu', \text{ де } c = \text{const}.$$

Теорема 5. Якщо чисельник і знаменник дробу диференційовні функції (знаменник не перетворюється в нуль), то похідна дробу також дорівнює дробу, чисельник якого є різницею добутків знаменника на похідну чисельника і чисельника на похідну знаменника, а знаменник є квадратом знаменника початкового дробу $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Похідні від основних елементарних функцій

1. $(x)' = 1$;
2. $(x^m)' = mx^{m-1}$;
3. $(e^x)' = e^x$;
4. $(a^x)' = a^x \ln a$;
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$;
7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
10. $(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
14. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Похідна складної функції.

Нехай $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, тобто $y = f(\varphi(x))$. Функція $f(u)$ називається *зовнішньою*, а функція $\varphi(x)$ — *внутрішньою*, або *проміжним аргументом.*

Теорема. Якщо $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$ — диференційовні функції від своїх аргументів, то похідна складної функції існує і дорівнює $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Похідна неявної функції.

Нехай рівняння $F(x; y) = 0$ визначає y як неявну функцію від x. Надалі будем вважати, що ця функція — диференційовна. Продиференціювавши за x обидві частини рівняння F (x; y) = 0, дістанемо рівняння першого степеня відносно y'. З цього рівняння легко знайти y', тобто похідну неявної функції.

Приклад. Знайти y'_x з рівняння $x^2 + y^2 = 4$.

Оскільки y є функцією від x, то y^2 розглядатимемо як складну функцію від x, тобто $(y^2)' = 2y \cdot y'$.

Продиференціювавши по x обидві частини заданого рівняння, дістанемо $2x + 2yy' = 0$. Звідси $y' = -\frac{x}{y}$.

Похідна оберненої функції.

Нехай задані дві взаємно обернені диференційовні функції

$$y = f(x) \text{ та } x = \varphi(y) \left(f(\varphi(y)) = y\right).$$

Теорема. Похідна x'_y оберненої функції $x = \varphi(y)$ по змінній y дорівнює оберненій величині похідної y'_x від прямої функції $y = f(x): x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Приклад. Обчислити похідну для функції $x = \arcsin y$.

Задана функція обернена до функції $y = \sin x$.

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Звідси $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Якщо в останньому виразі замість y записати x, то дістанемо

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Похідна параметрично заданої функції.

Нехай функцію y від x задано параметричними рівняннями:

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ y=\Psi(t) \end{array}\right\}(t_1 \le t \le t_2).$$

$$y'_x = \frac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)} \text{ або } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Дана формула дає можливість знаходити похідну y'_x від параметрично заданої функції, не знаходячи явної залежності $y = f(x)$.

Приклад. Функцію y від x задано параметричними рівняннями:

$$\left.\begin{array}{l} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{array}\right\}(0 \le t \le \pi).$$

Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$: а) при будь-якому t; б) при $t = \frac{\pi}{4}$.

а) $y'_x = \frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t$; б) $(y'_x)\big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

5.2. *Рівняння дотичної і нормалі до плоскої кривої*

Нехай функція $y = f(t)$ означена і неперервна на деякому проміжку $[a; b]$. Визначимо рівняння дотичної й нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 \in [a,b]$.

Оскільки дотична й нормаль проходять через точку з абсцисою x_0, то рівняння кожної з них будемо шукати у вигляді рівняння прямої, що проходить через задану точку M_0 $(x_0; y_0)$ у даному напрямі

Рівняння дотичної. Оскільки $y_0 = f(x_0)$, то дістанемо рівняння дотичної у вигляді

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Рівняння нормалі. *Нормаллю* до графіка функції в точці M_0 називається перпендикуляр, проведений до дотичної в цій точці

Використовуючи умову перпендикулярності дотичної та нормалі, знаходимо кутовий коефіцієнт нормалі $k = -\frac{1}{f'(x_0)}$ і записуємо її рівняння у вигляді

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Приклад. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -3$.

Знайдемо похідну від заданої функції $f'(x) = 2x$, звідси $f'(-3) = -6; f(-3) = (-3)^2 = 9$.

Рівняння дотичної і нормалі запишуться так: $y - 9 = -6(x+3), y - 9 = \frac{1}{6}(x+3)$ або у загальному вигляді: $6x + y + + 9 = 0$, $x - 6y + 57 = 0$.

5.3. Похідні вищих порядків

Похідна $y' = f'(x)$ від функції $y = f(x)$ називається *похідною першого порядку* і являє собою деяку нову функцію. Можливі випадки, коли ця функція сама має похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку $(y')'$ називається похідною *другого порядку від функції* $y = f(x)$ і позначається y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Похідна від похідної другого порядку $(y'')'$ називається *похідною третього порядку* і позначається y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3x}{dx^3}$.

Похідна від похідної $(n-1)$-го порядку $\left(y^{(n-1)}\right)'$ називається *похідною n-го порядку* і позначається $y^{(n)}, f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Таким чином, $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$, $n = 1, 2, \ldots$

Приклад. Знайти похідну третього порядку для функції $y = \sin(5x+4)$.

$y' = 5\cos(5x+4)$; $y'' = -25\sin(5x+4)$; $y''' = -125\cos(5x+4)$.

Добуток $f'(x)\Delta x$ називається *диференціалом функції* $y = f(x)$; його позначають символом dy, тобто $dy = f'(x)\Delta x$

Знайдемо диференціал функції $y = x$; для цього випадку $y' = (x)' = 1$, отже, $dy = dx = \Delta x$. Таким чином, диференціал незалежної змінної збігається з її приростом Δx. З огляду на це формулу для диференціала можна записати так:

$$dy = f'(x)dx\,.$$

5.4. Застосування деференціала в наближених обчисленнях

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x\,.$$

Приклад. Обчислити наближено $\sqrt{27}$.

Перетворимо вираз, що стоїть під знаком радикала:

$27 = 25 + 2 = 25\left(1 + \frac{2}{25}\right)$, звідки $\sqrt{27} = \sqrt{25\left(1 + \frac{2}{25}\right)} = 5\sqrt{1 + \frac{2}{25}}$.

При обчисленні $\sqrt{1 + \frac{2}{25}}$ введемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$, тоді $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Формула (4.12) у нашому випадку запишеться так:

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x, \text{ де } x = 1, \Delta x = \frac{2}{25}.$$

$$\sqrt{1 + \frac{2}{25}} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}\frac{2}{25} = 1 + \frac{1}{25} = 1{,}04\,.$$

$$\sqrt{27} \approx 5 \cdot 1{,}04 = 5{,}2\,.$$

Правила знаходження диференціала

1. $y = c$; $dy = 0$; 3. $y = u + v$, $dy = du + dv$;

2. $y = uv$, $dy = udv + vdu$; 4. $y = \dfrac{u}{v}$, $dy = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

5.5. Правило Лопіталя

Розглянемо відношення $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, де функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ визначені й диференційовні в деякому околі точки a, виключаючи, можливо, саму точку a. Може бути, що при $x\to a$ обидві функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ прямують до 0 або до ∞, тобто ці функції одночасно є нескінченно малими або нескінченно великими величинами при $x\to a$. Тоді говорять, що в точці a функція $f(x)$ має невизначеність виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ або $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

У цьому випадку, використовуючи похідні $\varphi'(x)$ і $\psi'(x)$, можна сформулювати правило для знаходження границі функції $f(x)$ при $x\to a$, тобто визначити спосіб для розкриття невизначеностей виду (6).

Теорема (правило Лопіталя). Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних (скінченній або нескінченній), якщо остання існує.

Зауваження. Якщо $\varphi'(x)$ і $\psi'(x)$ при $x\to a$ прямують одночасно до 0 або до ∞ і задовольняють ті умови, які були накладені теоремою на функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, то до відношення $\varphi'(x)/\psi'(x)$ знову застосовуємо правило Лопіталя і виводимо формулу

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}$$

і т. п.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{2x}$.

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 7x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{7\cos x}{2}=\frac{7}{2}.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^3+7x+5}$.

Виконання граничного переходу приводить до невизначеності виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^2+7x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+3x+1\right)'}{\left(2x^3+7x+5\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{6x^2+7}=$$

(виконання граничного переходу знову приводить до невизначеності виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, а тому застосовуємо правило Лопіталя повторно):

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)'}{\left(6x^2+7\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{12x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{6}\cdot 0=0\,.$$

Перетворення невизначеностей виду

$[0\cdot\infty]$; $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$, $[\infty-\infty]$ до виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Правило Лопіталя можна застосувати тільки для розкриття невизначеностей вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. При розкритті інших типів невизначеностей їх перетворюють до одного з цих видів.

Невизначеність виду $[0\cdot\infty]$. Нехай $\lim\limits_{x\to a}u(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$.

Потрібно знайти $\lim\limits_{x\to a}\left(u(x)\cdot v\cdot(x)\right)$.

Це невизначеність типу $[0\cdot\infty]$.

Якщо вираз $\lim\limits_{x\to a}\left(u(x)\cdot v\cdot(x)\right)$ записати у вигляді

$$\lim_{x\to a}u\cdot v=\lim_{x\to a}\frac{u}{\frac{1}{v}}\ \text{ або }\ \lim_{x\to a}u\cdot v=\lim_{x\to a}\frac{v}{\frac{1}{u}},$$

то при $x\to a$ дістанемо невизначеність відповідно вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)$.

Тут маємо невизначеність вигляду $[0\cdot\infty]$. Зобразимо добуток функції у вигляді частки, а потім, отримавши невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-3}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}x^3=0.$$

Невизначеність вигляду $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$. Нехай маємо функцію $u(x)^{v(x)}$.

При $x\to a$ (a — скінченне або нескінченне) можливі три випадки:

а) $u\to 0,\ v\to 0$ маємо невизначеність виду $[0^0]$;

б) $u\to\infty,\ v\to 0$ дістанемо невизначеність $[\infty^0]$;

в) $u\to 1,\ v\to\infty$ маємо невизначеність виду $[1^\infty]$.

Ці невизначеності за допомогою логарифмування зводяться до невизначеності вигляду $[0\cdot\infty]$. Справді, позначимо дану функцію через y, тобто візьмемо $y=u^v$. Прологарифмувавши цю рівність, дістанемо $\ln y=v\ln u(u>0)$.

Легко перевірити, що при $x\to a$ добуток $v\ln u$ буде невизначеністю $[0\cdot\infty]$ для всіх трьох випадків.

Відповідно до підпункту 1 розкриємо невизначеність $[0\cdot\infty]$, тобто знайдемо границю $\lim_{x\to a}\ln y=k$ (k — скінченне або ∞).

Звідси $\lim_{x\to a}y=\lim_{x\to a}u^v=e^k$.

Приклад. Знайти границю $\lim_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Це невизначеність виду $[0^0]$. Позначимо функцію, що стоїть під знаком границі, через y, тобто $y=(\sin x)^x$, і прологарифмуємо її:

$$\text{in}\, y=x\ln\sin x=\frac{\ln\sin x}{x^{-1}}.$$

Обчислимо границю логарифма даної функції. Тут маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{x^{-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x\left(-x^{-2}\right)}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x}=0.$$

Звідси $\lim_{x\to 0}(\sin x)^x=e^0=1$.

Приклад. Знайти границю $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

При $x\to 1$ маємо невизначеність $\left[1^{\infty}\right]$.

$$y=x^{\frac{1}{x-1}},\quad \ln y=\frac{\ln x}{x-1};\quad \lim_{x\to 1}\ln y=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1.$$

Звідси $\lim_{x\to 1} y=\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}=e^1=e$.

Невизначеність $[\infty-\infty]$. Якщо функції $u(x)\to\infty$, $v(x)\to\infty$ при $x\to a$ (a — скінченне або нескінченне), то різниця $u-v$ при $x\to a$ дає невизначеність $[\infty-\infty]$. Остання з допомогою алгебраїчних перетворень зводиться до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад. Знайти границю $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

Маємо невизначеність виду $[\infty-\infty]$. Алгебраїчним перетворенням приведемо цю невизначеність до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, а потім двічі застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

5.6. Екстремуми функцій.

Функція $f\ (x)$ називається *зростаючою на проміжку*, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції (якщо $x_2>x_1$ то

$f(x_2) > f(x_1)$); функція *спадна* на проміжку, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції (якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$).

Теорема 1 (необхідна умова зростання (спадання) функції):

1. Якщо диференційовна функція зростає на деякому проміжку, то похідна цієї функції невід'ємна на цьому проміжку.
2. Якщо диференційовна функція спадає на деякому проміжку, то похідна цієї функції недодатна на цьому проміжку.

Теорема 2 (достатня умова зростання (спадання) функції):

1. Якщо похідна диференційовної функції додатна всередині деякого проміжку, то функція зростає на цьому про-
міжку.
2. Якщо похідна диференційовної функції від'ємна всередині проміжку, то функція спадає на цьому проміжку.

При значенні x_1 аргументу *x функція f (x) має максимум f (x*$_1$), якщо в деякому околі точки x_1 виконується нерівність $f(x_1) > f(x)(x \neq x_1)$. Аналогічно: при значенні x_2 аргументу *x функція f (x) має мінімум f (x*$_2$), якщо в деякому околі точки x_2 має місце нерівність $f(x_2) < f(x)(x \neq x_2)$.

Максимум або мінімум функції називається екстремумом функції, а ті значення аргументу, при яких досягаються екстремуми функції, називаються точками екстремуму функції (відповідно точками максимуму або мінімуму функції).

Екстремум функції, у загальному випадку, має локальний характер — це найбільше або найменше значення функції порівняно з ближніми її значеннями.

Необхідна умова екстремуму функції.

Теорема. У точці екстремуму диференційовної функції похідна її дорівнює нулю: $f'(x_2) = 0$.

Наслідок. Неперервна функція може мати екстремум тільки в тих точках, де похідна функції дорівнює нулю або не існує.

Справді, якщо в точці x_0 екстремуму функції $f(x)$ існує похідна $f'(x_0)$, то, згідно з даною теоремою, ця похідна дорівнює нулю.

Ті значення аргументу x, які для заданої функції перетворюють на нуль її похідну $f'(x)$ або для якої похідна $f'(x)$ не існує (наприклад, перетворюється на нескінченність), називаються *критичними значеннями аргументу* (*критичними точками*).

Достатні умови екстремуму функції.

Із того, що $f'(x_0)=0$, не випливає, що функція $f(x)$ має екстремум при $x=x_0$.

Теорема 1 (перше правило).

Нехай функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі, в якому міститься критична точка x_0, і диференційовна в усіх точках цього інтервалу (крім, можливо, самої точки x_0). Якщо при переході зліва направо через цю точку похідна:

1) змінює знак з «+» на «–», то при $x = x_0$ функція має максимум;

2) змінює знак «–» на «+», то функція має у цій точці мінімум;

3) не змінює свого знака, то функція в точці $x = x_0$ екстремуму не має.

Зауваження. На основі даної теореми можна сформулювати таке правило для дослідження неперервної функції $y=f(x)$ на максимум і мінімум.

1. Знаходимо першу похідну функції, тобто $f'(x)$.

2. Обчислюємо критичні значення аргументу x (критичні точки), для цього:

а) прирівнюємо першу похідну до нуля і знаходимо дійсні корені здобутого рівняння $f'(x)=0$;

б) знаходимо значення x, для яких похідна $f'(x)$ має розрив.

3. Досліджуємо знак похідної ліворуч і праворуч від критичної точки. Оскільки знак похідної залишається сталим в інтервалі між двома критичними точками, для дослідження знака похідної ліворуч і праворуч, наприклад від критичної точки x_2, досить визначити знак похідної в точках α і $\beta (x_1 < \alpha < x_2 < \beta < x_3)$, де x_1 і x_3 — найближчі критичні точки).

4. Обчислюємо значення функції $f(x)$ у кожній критичній точці.

Теорема 2 (друге правило).

Якщо для диференційовної функції $f(x)$ у деякій точці x_0 її перша похідна $f'(x)$ дорівнює нулю, а друга похідна $f''(x)$ існує й відмінна від нуля, тобто $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, то:

1) якщо друга похідна $f''(x_0)>0$, то в точці x_0 функція $f(x)$ має мінімум;

2) якщо $f''(x_0)<0$ — максимум;

3) якщо $f''(x_0)=0$ — питання залишається відкритим, і для його розв'язання треба застосувати перше правило.

Зауваження. Для критичних точок, в яких похідна функції не існує або дорівнює нескінченності, друге правило не застосовується.

Крива на проміжку називається *опуклою* (*угнутою*), якщо всі точки кривої лежать нижче (вище) будь-якої її дотичної на цьому проміжку. Точка, яка відокремлює опуклу частину кривої від вгнутої, називається *точкою перегину.*

Теорема 1.

1) Якщо в усіх точках проміжку $(c,\ b)$ для функції $y=f(x)$ друга її похідна додатна ($f''(x)>0$), то графік функції вгнутий.

2) Якщо в усіх точках проміжку $(a,\ c)$ друга похідна від'ємна ($f''(x)<0$), то графік функції випуклий.

Теорема 2.

Якщо для функції $y=f(x)$ друга похідна її $f''(x)$ у деякій точці x_0 перетворюється на нуль або не існує й при переході через цю точку змінює свій знак на обернений, то точка $M(x_0,\ f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції.

Зауваження. Якщо у точці x_0 друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, але при переході через цю точку $f''(x)$ не змінює свого знака, то точка $M(x_0,\ f(x_0))$ не є точкою перегину.

Асимптоти кривих.

Змінна точка M рухається по кривій у нескінченність, коли відстань від цієї точки до початку координат необмежено зростає.

Пряма називається *асимптотою кривої*, якщо відстань d від змінної точки M кривої до цієї прямої при віддаленні точки M у нескінченність прямує до нуля. Асимптоти бувають *вертикальні* й *похилі*.

Вертикальні асимптоти. Якщо

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty, \text{ або } \lim_{x\to a-0} f(x)=\infty,$$

або $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то пряма $x=a$ є вертикальною асимптотою для графіка функції $y=f(x)$.

Похилі асимптоти. Нехай крива $y=f(x)$ має похилу асимптоту $y=kx+b$, тоді

$$\left.\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) \end{aligned}\right\}.$$

Якщо хоча б одна з границь не існує, то крива похилих асимптот у відповідній напівплощині не має.

Загальна схема побудови графіків функцій.

План дослідження функцій і побудови їхніх графіків

При дослідженні функцій треба:

1. Знайти область визначення функції.
2. Встановити парність (непарність) і періодичність функції.
3. Знайти точки розриву функції та їх характер.
4. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
5. Знайти точки екстремуму та обчислити значення функції у цих точках.
6. Визначити інтервали зростання й спадання функції.
7. Знайти точки перегину, інтервали випуклості й вгнутості.
8. Знайти асимптоти.
9. Знайти граничні значення функції, коли x прямує до граничних точок області визначення.

Приклад. Дослідити функцію $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях x за винятком значення $x = 1$. Звідси її область визначення $\{-\infty < x < 1;\ 1 < x < +\infty\}$.

2. Точка $x = 1$ є точкою розриву функції. Дослідимо її характер:

$$\lim_{x \to 1 \pm 0} y = \lim_{x \to 1 \pm 0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} (x-1)^2} = +\infty.$$

Як ліворуч, так і праворуч точки $x = 1$ маємо нескінченний розрив.

Точка $x = 1$ — точка розриву другого роду.

3. Вертикальні асимптоти. Пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

4. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат: з віссю Ox: $y = 0$, $\frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0$, $2x-1=0$, $x = \frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$; з віссю Oy: $x = 0$, $y = \frac{-1}{1} = -1$, $(0;\ -1)$.

5. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції, результати заносимо у табл. 4.3:

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2x}{(x-1)^3};\ y' = 0 \Rightarrow$$

$-2x = 0 \Rightarrow x = 0$ — критична точка. При $x = 1$ y' не існує, але у цій точці сама функція теж не існує. Дослідимо критичну точку $x = 0$ на екстремум:

при $x = -1$ $y' = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4} < 0(-)$;

при $x = \frac{1}{2}$ $y' = \frac{-1}{-1/8} = 8 > 0(+)$.

x	$(-\infty, 0)$	0	(0, 1)	1	$(1, +\infty)$
y'	–	0	+	Не існує	–
y	↘	y_{min} (–1)	↗	Не існує	↘

Проходячи через критичну точку зліва направо, похідна змінює знак з «–» на «+», через це в точці $x = 0$ функція має мінімум:

$$y_{\min} = \frac{-1}{1} = -1.$$

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'(x) < 0$, отже, функція на цьому інтервалі спадає.

6. Точки перегину та інтервали опуклості й вгнутості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної:

$$y'' = \frac{-2(x-1)^3 + 6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}; \quad y'' = 0 \Rightarrow$$

$2(2x+1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$; при $x = 1$ y'' не існує, але в цій точці не існує і сама функція.

Дослідимо точку $x = -\frac{1}{2}$:

при $x = -1$ $y'' = \frac{2(-2+1)}{(-2)^4} = -\frac{1}{8} < 0(-)$;

при $x = 0$ $y'' = \frac{2}{1} = 2 > 0(+)$.

Друга похідна, проходячи через $x = -\frac{1}{2}$, змінює знак, отже, точка перетину кривої з цією абсцисою є точкою перегину.

Знайдемо її ординату:

$$y = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1}{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2} = -\frac{8}{9} \approx -0{,}9.$$

Таким чином, точка $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{9}\right)$ — точка перегину.

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'' > 0$, значить, графік функції вгнутий.

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
y''	+	0	+	Не	+

				існує	
y	$\cap$	Перегин (– 8/9)	$\cup$	Не існує	$\cup$

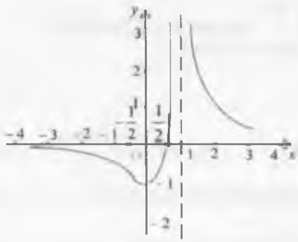
7. Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x-1}{x(x-1)^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

Таким чином, похилою асимптотою є $y = 0$ (вісь Ox).

На підставі результатів дослідження будуємо графік функції.



Контрольні питання.

1. Дати означення похідної.
2. Який фізичний зміст похідної?
3. Який геометричний зміст похідної?
4. Записати основні правила диференціювання функцій.
5. Класифікація точок розриву.
6. Записати формули похідних основних елементарних функцій.
7. Дати означення диференціалу функції.
8. Дати означення другої похідної.

9. Сформулювати умови зростання і спадання функції.

10. Сформулювати правило дослідження функції на екстремум.

11. Яка функція називається опуклою вниз (вгору)?

12. Сформулювати правило знаходження точок перегину графіка функції.

13. Сформулюйте правила знаходження асимптот.

14. Правило Лопіталя.

Завдання для самостійної роботи.

1. Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ заданних функцій.

а) $y = \arccos x \cdot e^{x}$; б) $y = \frac{1-\cos x}{1+2^{x}}$; в) $y = \arcsin^{3}(-x)$;

г) $y = e^{\frac{1}{\cos 3x}}$; д) $y = (\mathrm{ctg}\, 4x)^{x}$; е) $x = y^{2} + \mathrm{arctg}\,(xy)$.

2. Знайти $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2y}{dx^2}$ для заданих функцій:

а) $y = \mathrm{arctg}\, x^{2}$; б) $x = 2t - \sin 2t, \quad y = \sin^{3} t.$

в) $y = \ln(\sin 2x)$; г) $x = \frac{1}{\cos t}, \quad y = 2\,tg\, t.$

3. Дослідити функцію та побудувати її графік

а) $y = \frac{x^{3}+4}{x^{2}}$; б) $y = x^{3} \cdot e^{-x}$.

в) $y = \frac{4x}{(x+1)^{2}}$; г) $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

д) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$; е) $y = \ln(2x^2 + 3)$.

4. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x^2}{x^2 - \sin x^2}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{1/x^2} - 1}{2\operatorname{arctg} x^2 - \pi}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\ln(1+2x)}$.

7. $\lim\limits_{x\to 1/2} \left(\dfrac{x}{3x-1} - \dfrac{1}{\ln 3x}\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x \cdot \operatorname{tg} x$.

Тема № 6: Інтегральне числення

6.1. Первісна.

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку I, якщо на цьому проміжку $F'(x) = f(x)$ або $dF(x) = f(x)dx$.

Із означення виходить, що первісна $F(x)$ — диференційовна, а значить неперервна функція на проміжку I, і її вигляд суттєво залежить від проміжку, на якому вона розглядається.

Теорема. Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на проміжку I, то

1) $F(x) + C$ — також первісна для $f(x)$ на проміжку I;

2) будь-яка первісна $\Phi(x)$ для $f(x)$ може бути подана у вигляді $\Phi(x) = F(x) + C$ на проміжку I. (Тут $C = \text{const}$ називається *довільною сталою.*)

Наслідок. Дві будь-які первісні для однієї й тієї самої функції на проміжку I відрізняються між собою на сталу величину.

6.2.Невизначений інтеграл, його властивості.

Операція знаходження первісних для функції $f(x)$ називається *інтегруванням* $f(x)$.

Задача інтегрування функції на проміжку полягає у тому, щоб знайти всі первісні функції на цьому проміжку, або довести, що функція не має первісних на цьому проміжку.

Для розв'язування задачі інтегрування функції достатньо знайти одну будь-яку первісну на розглядуваному проміжку, наприклад $F(x)$, тоді (за теоремою про множину первісних) $F(x)+C$ — загальний вигляд всієї множини первісних на цьому проміжку.

Функція $F(x)+C$, що являє собою загальний вигляд всієї множини первісних для функції $f(x)$ на проміжку I, називається *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на проміжку I і позначається

$$\int f(x)dx = F(x)+C\,,\ \left(F'(x)=f(x)\right),$$

де $\int$ — знак невизначеного інтеграла;

$f(x)$ — підінтегральна функція;

$f(x)dx$ — підінтегральний вираз;

dx — диференціал змінної інтегрування.

Геометричний зміст невизначеного інтеграла полягає в тому, що функція $y=F(x)+C$ є рівняння однопараметричної сім'ї кривих, які утворюються одна з одної паралельним перенесенням уздовж осі ординат.

Теорема (Коші). Для існування невизначеного інтеграла для функції $f(x)$ на певному проміжку достатньо, щоб $f(x)$ була неперервною на цьому проміжку.

Зауваження. Виявляється, є такі невизначені інтеграли від елементарних функцій, які через елементарні функції не виражаються, наприклад:

$$\int e^{-x^2}dx\,,\ \int\frac{\sin x}{x}\,,\ \int\frac{dx}{\ln x}\,,\ \int\cos x^2 dx$$

існують у кожному із проміжків області визначення, але записати їх через основні елементарні функції не можна; в такому розумінні ці інтеграли називають «неінтегровними».

Властивості невизначеного інтеграла

I. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x)$.

II. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу.

III. $\int dF(x) = F(x)+C$.

б) *Властивості, що відображають основні правила інтегрування.*

IV. Сталий множник, що не дорівнює нулю, можна виносити з-під знака інтеграла, тобто

$$\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx,\ \ k\neq 0.$$

V. Невизначений інтеграл від суми функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій, якщо вони існують, тобто

$$\int (f_1(x)+f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

Таблиця основних інтегралів

1. $\int 0\cdot dx = C$; 2. $\int dx = x + C$; 3. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha\neq -1$;

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$; 5. $\int e^x dx = e^x + C$; 6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C, a\neq 1$;

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$; 8. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$; 10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

11. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$; 12. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$;

13. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$; 14. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;

16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + C$;

17. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$;

18. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + C$;

19. $\int \frac{xdx}{x^2+a} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+a\right| + C$;

20. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0$;

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$.

6.3. Основні методи інтегрування.

Інтегрування розкладанням

Цей метод базується на властивості невизначеного інтеграла (7.3). Мета методу — розкласти підінтегральну функцію на такі доданки, інтеграли від яких відомі або їх простіше інтегрувати, ніж початкову підінтегральну функцію.

Приклад. $\int \frac{1 \cdot dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx =$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\text{ctg}\, x + \text{tg}\, x + C.$$

Метод інтегрування частинами

***Теорема* . Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають неперервні похідні, то:**

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v du.$$

На практиці функції $u(x)$ та $v(x)$ рекомендується вибирати за таким **правилом**:

— при інтегруванні частинами підінтегральний вираз $f(x)dx$ розбивають на два множники типу $u \cdot dv$, тобто $f(x)dx = u \cdot dv$; при цьому функція $u(x)$ вибирається такою, щоб при диференціюванні вона спрощувалась, а за dv беруть залишок підінтегрального виразу, який містить dx, інтеграл від якого відомий, або може бути просто знайдений.

Приклад.

$$\int x\sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int dv = \int \sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| = -x\cos x - \int -\cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Інколи доводиться інтегрування частинами застосовувати кілька разів.

Метод підстановки (заміна змінної інтегрування)

Мета методу підстановки — перетворити даний інтеграл до такого вигляду, який простіше інтегрувати.

Теорема. Якщо $f(x)$ — неперервна, а $x = \varphi(t)$ має неперервну похідну, то:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt; \\ t = \varphi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Приклад.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)} = \left| \begin{array}{l} x = t^6, \\ dx = 6t^5dt; \\ t = \sqrt[6]{x} \end{array} \right| = \int \frac{6t^5dt}{t^3\left(t^2+1\right)} = 6\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt =$$

$$= 6\int\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C = 6\sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$$

Метод безпосереднього інтегрування

При безпосередньому інтегруванні використовується формула варіанта заміни змінної, але саму заміну не записують (її роблять усно) при цьому використовують операцію внесення функції під знак диференціала. Отже, якщо $\int f(u)du = F(u) + C,$, то

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))\cdot d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C.$$

Зокрема, коли $\varphi(x)$ є лінійною функцією, тобто $\varphi(x) = ax + b,$, дістаємо:
$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{2}\int f(ax+b)\cdot d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$.

Зауваження. Під знак диференціала можна вносити будь-який сталий доданок (значення диференціала при цьому не зміниться):

$$d\varphi(x) = d(\varphi(x) + C).$$

Приклад. $\int \frac{\sin x dx}{1+3\cos x} = \int \frac{d(-\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(3\cos x)}{1+3\cos x} =$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{d(1+3\cos x)}{1+3\cos x}=-\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C.$$

Інтегрування раціональних дробів

Відношення двох многочленів $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається *раціональним дробом.*

Раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається *правильним*, якщо степінь многочлена в чисельнику менший від степеня многочлена в знаменнику, тобто $n < m$; якщо $n \geq m$, то дріб називається *неправильним*.

***Теорема*.** Будь-який неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми многочлена (цілої частини) та правильного раціонального дробу.

За домовленістю *найпростішими раціональними дробами* називаються такі дроби чотирьох типів:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a};\ \text{II. } \frac{A}{(x-a)^k};\ \text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q};\ \text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

де $k \geq 2,\ k\in N,\ D=p^2-4q<0$, інтеграли від яких мають вигляд

I. $\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C$;

II. $\int\frac{Adx}{(x-a)^k}=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C$;

III. $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ — розглянуто в (7.1.9);

IV. $\int\frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^k}$ — інтегрується за допомогою рекурентних формул.

***Теорема*.** Будь-який правильний раціональний нескоротний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n<m)$ можна подати у вигляді скінченної кількості найпростіших дробів, використовуючи такі правила:

1). Якщо $Q_m(x)=(x-a)^k\cdot g_{m-k}(x)$,, то

$$\frac{P_n(x)}{(x-a)^k g_{m-k}(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{r(x)}{g_{m-k}(x)};$$

2). Якщо $Q_m(x)=\left(x^2+px+q\right)^k\cdot g_{m-2k}(x),$ то $\dfrac{P_n(x)}{\left(x^2+px+q\right)^k\cdot g_{m-k}(x)}=$

$$=\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{A_kx+B_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\frac{r(x)}{g_{m-2k}(x)},$$

де A_i, B_i, $i=\left(\overline{1,k}\right)$ — деякі коефіцієнти, $\dfrac{r(x)}{g_{m-k}(x)}$ та $\dfrac{r(x)}{g_{m-2k}(x)}$ — правильні раціональні дроби.

Приклад. Даний правильний раціональний дріб ($n<12$) розкласти на суму найпростіших дробів.

$$\frac{P_n(x)}{(x+1)(x+2)^2x^3\left(x^2-x+2\right)\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{B_2}{(x+2)^2}+$$

$$+\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+\frac{C_3}{x^3}+\frac{Dx+E}{x^2-x+2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Коефіцієнти A_1, B_1, B_2, ..., N_2 поки що невідомі (невизначені коефіцієнти); для їх знаходження треба праву частину рівності звести до спільного знаменника (найменшого) і знайдений чисельник прирівняти до чисельника даного дробу (бо здобуті дроби тотожно рівні й у них рівні знаменники). Із тотожної рівності многочленів у чисельниках одержимо рівності коефіцієнтів при однакових степенях змінної x, що являють собою систему лінійних рівнянь для знаходження коефіцієнтів A_1, B_1, B_2, ..., N_2. Описаний вище метод називають *методом невизначених коефіцієнтів*.

Методика інтегрування раціональних функцій

1. Якщо підінтегральна функція — неправильний раціональний дріб, то за допомогою ділення його розкладають на суму многочлена та правильного раціонального дробу.

2. Знаменник правильного раціонального дробу розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

3. Інтегрують цілу частину та найпростіші дроби.

Приклад. $\int \frac{x^4+2x}{x^3+8}dx = \left| \begin{array}{l|l} x^4+2x & x^3+8 \\ - & x \\ x^4+8x & \\ \hline -6x & \end{array} \right| \quad \frac{x^4+2x}{x^3+8} = x - \frac{6x}{x^3+8};$

$$\frac{6x}{x^3+8} = \frac{6x}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} =$$

$$= \frac{A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)}{x^3+8} \Rightarrow 6x = A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x = x^2(A+B)+x(-2A+2B+C)+4A+2C;$$

$$\left. \begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A+B \\ x^1 & 6 = -2A+2B+C \\ x^0 & 0 = 4A+2C \\ \multicolumn{2}{l}{x=-2 \Rightarrow -12 = 12A} \end{array} \right| \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=-1 \\ B=1 \\ C=2 \end{array} \right| = \int\left(x + \frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x^2-2x+4}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int\frac{(x+2)dx}{(x-1)^2+3} = \left| \begin{array}{l} x-1=t \\ dx=dt \\ x=t+1 \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int\frac{t+3}{t^2+3}dt =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int\frac{tdt}{t^2+3} - 3\int\frac{dt}{t^2+3} = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln(t^2+3) -$$

$$- \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + C = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \ln\sqrt{x^2-2x+4} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Інтегрування тригонометричних функцій

Розглянемо $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де R — раціональна функція відносно $\sin x$, $\cos x$, тобто над $\sin x$, $\cos x$ виконуються лише арифметичні дії та піднесення до цілого степеня, наприклад:

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{2\sin^2 x + \cos^3 x}{3\sin^4 x - 4\sin x\cos^2 x}.$$

Існують такі підстановки, що за їх допомогою інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ завжди може бути зведений до інтеграла від раціональної функції $\int R^*(t)dt$, загальну схему інтегрування якої розроблено.

I. Універсальна тригонометрична підстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,\ \ x = 2\operatorname{arctg} t,\ \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \\ \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \\ \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R^*(t)dt.$$

Приклад. $\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,\ x = 2\operatorname{arctg} t, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2};\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{(1+t^2)2dt}{2t(1+t^2)} =$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Зауваження. На практиці універсальну тригонометричну підстановку використовують, якщо $\sin x$, $\cos x$ входять у невисокому степені (інакше розрахунки будуть дуже складні).

II. Підінтегральна функція — непарна відносно $\sin x$, тоді роблять підстановку $\cos x = t$.

Приклад. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^3 x \cdot \sin x}{\cos^2 x \cdot \sin x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx =$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{1-t^2}{t^2}(-dt) =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)dt = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C.$$

III. Підінтегральна функція — непарна відносно $\cos x$ раціоналізується за допомогою підстановки $\sin x = t$.

Приклад. $\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^3 x \sin^2 x \frac{\cos x}{\cos x}dx =$

$$=\int \cos^2 x\cdot \sin^2 x\cdot \cos x dx=\int \left(1-\sin^2 x\right)\sin^2 x\cos x dx=\left|\begin{array}{l}\sin x=t\\ dt=\cos x dx\end{array}\right|=$$

$$=\int \left(1-t^2\right)t^2 dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$$

IV. Підінтегральна функція $R(\sin x,\cos x)$ — парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ разом, тобто $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$..

У цьому випадку використовують підстановку $\operatorname{tg} x=t$ або $\operatorname{ctg} x=t$..

Приклад. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=t,\ \ x=\operatorname{arctg} t,\ \ dx=\dfrac{dt}{1+t^2};\\ \sin^2 x=\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\dfrac{t^2}{1+t^2};\\ \cos^2 x=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\dfrac{1}{1+t^2}\end{array}\right|=$

$$=\int \frac{\left(1+t^2\right)^2\left(1+t^2\right)dt}{t^4\left(1+t^2\right)}=\int \frac{1+2t^2+t^4}{t^4}dt=\int \left(\frac{1}{t^4}+\frac{2}{t^2}+1\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{3t^3}-\frac{2}{t}+t+C=\operatorname{tg} x-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}-2\operatorname{ctg} x+C.$$

V. Підінтегральна функція $R(\operatorname{tg} x)$ раціоналізується підстановкою $\operatorname{tg} x=t$.

Приклад. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x dx=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=t\\ x=\operatorname{arctg} t\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int \frac{t^3 dt}{t^2+1}=\left|\begin{array}{l|l} t^3 & t^2+1 \\ \hline - & t \\ t^3+t & \\ \hline -t & \end{array}\right|=$

$$=\int \left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)dt=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+C=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+1}+C.$$

Зауваження. В інтегралах $\int \sin^{2n} x\cdot\cos^{2m} x dx$ рекомендується скористатись формулами зниження степеня:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ \ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\ \ \sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}.$$

Приклад.

$$\int \sin^2 x\cos^2 x dx=\frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx=\frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C.$$

Зауваження. При інтегруванні інтегралів типу:

$\int \sin(ax)\cdot\cos(bx)dx$, $\int \cos(ax)\cdot\cos(bx)dx$, $\int \sin(ax)\cdot\sin(bx)dx$ $a \neq b$,, треба скористатися формулами: $\sin(ax)\cdot\cos(bx) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \; + \sin(a-b)x)$,

$$\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x),$$

$$\sin(ax)\cdot\sin(bx) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x).$$

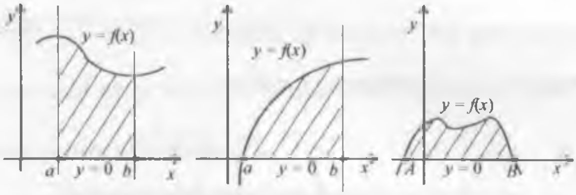
Приклад.

$$\int \cos 2x \cdot \sin 5x \cdot dx = \frac{1}{2}\int(\sin 7x + \sin 3x)dx = -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C.$$

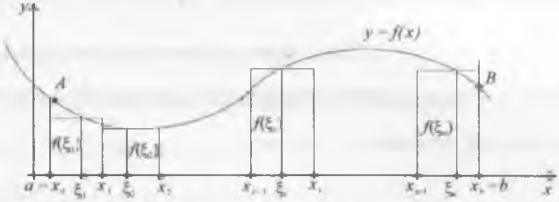
6.4. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Криволінійною трапецією називається плоска фігура, що обмежена лініями: $y = f(x) \geq 0$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$.

На рисунку зображені: класична криволінійна трапеція (a) та її вироджені випадки ($б$) та ($в$).



Задача. Обчислити площу криволінійної трапеції $aABв$.

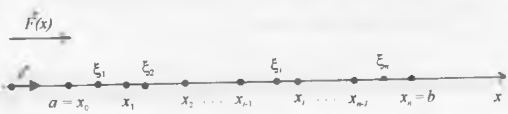


Розв'язання.

Розіб'ємо проміжок [a; b] на n частин точками x_i, $i = \overline{(0, n)}$ так що $a = x_0$, $b = x_n$. Виберемо точки ξ_i так: $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. Побудуємо прямокутники з основою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і висотою $f(\xi_i)$.

Площа елементарного прямокутника $\Delta S_i = f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$. Площа ступінчастої фігури $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = S_n$ буде тим менше відрізнятись від площі криволінійної трапеції S_{aABb}, чим менша довжина $\max\Delta x_i$, а в граничному випадку ці площі будуть збігатися, тобто $S_{aBAb} = \lim\limits_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\xi_i\cdot\Delta x_i$

Задача. Обчислити роботу змінної сили $\vec{F} = \vec{e}\cdot f(x), |\vec{e}| = 1$, що виконується при переміщенні матеріальної точки на проміжку $x \in [a, b]$.



Розв'язання.

Розіб'ємо проміжок [*a*; *b*] на *n* частин точками x_i, $i = \overline{0, n}$ На кожному з відрізків $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ вважатимемо, що сила стала і дорівнює $f(\xi_i)$, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ (рис. 7.5).

Елементарна робота сили на відрізку Δx_i буде $\Delta A_i = f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$. Робота *A* сили $\vec{F}$ на відрізку [*a*; *b*] знайдеться тоді так:

$$A = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

Сума типу $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ називається *інтегральною сумою*.

Поняття визначеного інтеграла

Нехай $y = f(x)$ — деяка функція, що задана на проміжку [*a*; *b*]. Розіб'ємо [*a*; *b*] на *n* частин точками x_i, так що

$$a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_{i-1} < x_i <\ldots< x_{n-1} < x_n = b.$$

Обчислимо $f(\xi_i)$, де $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $i = \overline{1, n}$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Складемо інтегральну суму $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Позначимо $\lambda = \max\Delta x_i$.

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_n при $\lambda \to 0$ і не залежить ні від способу розбиття [*a*; *b*] на частини Δx_i, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається *визначеним інтегралом від функції* $f(x)$ *на проміжку* [*a*; *b*] і позначається:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$$

де $\int_a^b$ — знак визначеного інтеграла;

a, *b* — нижня та верхня межі інтегрування;

f(*x*) — підінтегральна функція;

f(*x*) *dx* — підінтегральний вираз;

dx — диференціал змінної інтегрування.

За означенням, визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ — число, яке залежить від типу функції $f(x)$ та проміжку [*a*; *b*]; він не залежить від того, якою буквою позначена змінна інтегрування: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

Функція, для якої на [*a*; *b*] існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається *інтегровною на цьому проміжку*.

Геометричний зміст визначеного інтеграла

Якщо $f(x) \geq 0,\ x \in [a,\, b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції

Властивості визначеного інтеграла

I. Якщо $f(x) = c = \text{const}$, то $\int_a^b c dx = c \cdot (b-a)$.

II. Сталий множник можна виносити з-під знака визначеного інтеграла, тобто $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$.

III. Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ інтегровні на [*a*; *b*], то

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

IV. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить лише свій знак на протилежний, тобто $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

V. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю $\int_a^a f(x)dx = 0.$

VI. Якщо $f(x)$ — інтегровна в будь-якому із проміжків: $[a; b]$, $[a; c]$, $[c; b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

VII. Якщо $f(x) \geq 0$ і інтегровна для $x \in [a, b]$, $b > a$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

VIII. Якщо $f(x)$, $g(x)$— інтегровні та $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a, b]$, $b > a$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$

IX. Якщо $f(x)$ — інтегровна та $m \leq f(x) \leq M$ для $x \in [a, b]$, $b > a$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

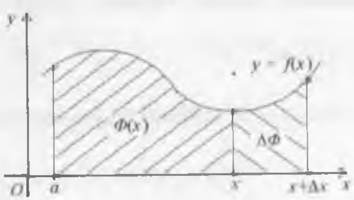
***Теорема* (*про середнє*).**

Якщо функція $f(x)$ — неперервна для $x \in [a, b]$, $b > a$, то знайдеться така точка $x = c \in [a, b]$, що: $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$

6.5. Обчислення визначених інтегралів. Формула Ньютона Лейбніца.

Розглянемо інтеграл $\Phi(x) = \int_a^x f(x)dt$, який буде функцією від верхньої межі інтегрування. Змінній x надамо приросту Δx, що зумовить приріст функції.

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$



Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна для будь-якого $x \in [a; b]$, то похідна від інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування по цій межі дорівнює підінтегральній функції від верхньої межі інтегрування, тобто

$$\Phi'_x(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x).$$

Теорема. **(Ньютона—Лейбніца).** Якщо функція $f(x)$ — неперервна для $x \in [a; b]$, то визначений інтеграл від функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ дорівнює приросту первісної функції $f(x)$ на цьому проміжку, тобто

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), \text{ де } F'(x) = f(x).$$

Позначимо дію подвійної підстановки так: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, тоді зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами можна подати такою рівністю:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = (F(x) + C)\Big|_a^b = \left(\int f(x)dx\right)\Big|_a^b$$

Метод підстановки у визначеному інтегралі

Теорема. Якщо: 1) $f(x)$ — неперервна для $x \in [a; b]$; 2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$; 3) $x = \varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ — неперервні для $t \in [\alpha; \beta]$; 4) при $t \in [\alpha; \beta] \Rightarrow x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t)dt; \\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array} \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Зауваження. При заміні змінної інтегрування у визначеному інтегралі змінюються межі інтегрування, і тому нема потреби повертатись до початкової змінної.

Приклад. $\displaystyle\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{array}{c} x = t^2, \ dx = 2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int_2^3 \frac{t+1-1}{t+1}dt =$

$$= 2\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2(t - \ln|t+1|)\Big|_2^3 = 2(3 - \ln 4 - (2 - \ln 3)) = 2\left(1 + \ln\frac{3}{4}\right)$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають неперервні похідні для $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Приклад.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx; \\ \cos 2x\,dx = dv. \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(0\cdot\sin 0 + \frac{1}{2}\cos 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

6.6. Обчислення площ плоских фігур в прямокутній системі координат

Якою б не була криволінійна фігура, що обмежена неперервними кривими лініями, шляхом її розсікання лініями паралельними осям координат, обчислення площі фігури можна звести до обчислення площ розглянутих нижче фігур.

I. Фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис. 1). Функція $f(x)$ — неперервна та $f(x) \geq 0$. Площа S такої криволінійної трапеції за геометричним змістом визначеного інтеграла така: $S = \int_a^b f(x)dx$.

Якщо при виконанні всіх інших умов $f(x) \leq 0$ (рис. 2),

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

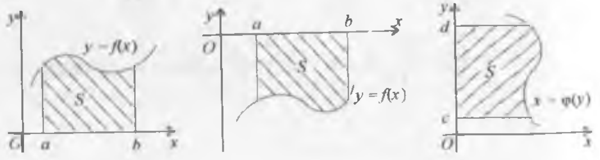


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

II. Фігура обмежена лініями $x=\varphi(y)$, $x=0$, $y=c$, $y=d$ (рис. 3). Функція $x=\varphi(y)$ — неперервна та $\varphi(y)\ge 0$. Площа S такої фігури буде

$$S=\int_c^d \varphi(y)dy,$$

а якщо $\varphi(y)\le 0$ (рис. 4), то

$$S=\left|\int_c^d \varphi(y)\,dy\right|.$$

III. Фігура обмежена лініями $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$. Функції $f(x)$ та $g(x)$ — неперервні та $f(x)\ge g(x)$ для $x\in[a;b]$ (рис. 5). Площа S такої фігури визначається як різниця площ фігур aA_2B_1b та aA_2B_1b

$$S=\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)dx.$$

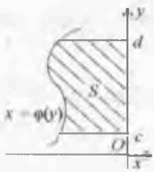


Рис. 4

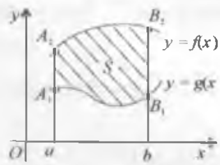
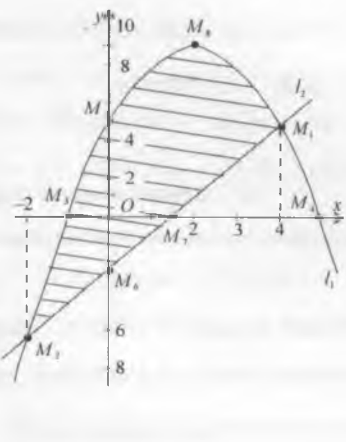


Рис. 5

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$y=-x^2+4x+5 \text{ та } y=2x-3.$$



Побудуємо фігуру, обмежену параболою $y=-x^2+4x+5$ (l_1) та прямою $y=2x-3$ (l_2) на координатній площині; при цьому знаходимо точки перетину заданих ліній між собою та з осями координат, а також координати вершини параболи.

$$l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} y=2x-3 \\ x^2-2x-8=0 \end{cases} \begin{cases} y=2x-3 \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(4;\ 5) \\ M_2(-2;\ -7). \end{array}\right.$$

$$l_1 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x^2-4x-5=0 \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_4(5;\ 0) \\ M_3(-1;\ 0). \end{array}\right.$$

$$l_1 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ x=0 \end{cases} \begin{cases} y=5 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_5(0;\ 5).$$

$$l_2 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow M_7(1{,}5;\ 0).$$

$$l_2 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow M_6(0;\ -3).$$

Точка $M_8(2;9)$ — вершина параболи $y-9=-(x-2)^2$.

Площа S фігури $M_1M_8M_2$ буде така:

$$S=\int_{-2}^{4}\left(-x^2+4x+5-(2x-3)\right)dx=\int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right)\Bigg|_{-2}^{4}=$$

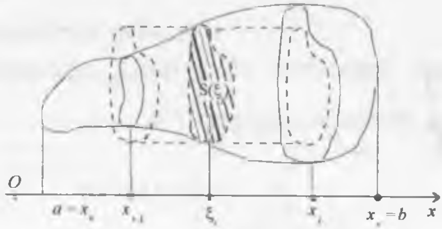
$$=-\frac{64}{3}+16+32-\left(\frac{8}{3}+4-16\right)=36.$$

6.7. Обчислення об'єму тіла

Задача. Знаючи закон зміни площі поперечного перерізу тіла, знайти його об'єм.

Розв'язання. Нехай функція $S=S(x)$ — площа поперечного перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox у деякій точці $x\in[a;\ b]$. Відрізок $[a;\ b]$ дає лінійний розмір тіла в напрямі осі Ox.

Поділимо проміжок $[a;b]$ на n частин точками x_i, $i=(\overline{0,n})$ так, що $a=x_0$, $b=x_n$. Через ці точки проведемо площини перпендикулярно до осі, у результаті чого тіло буде розбито на n частин. Кожну з цих частин наближено замінимо циліндром з висотою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ та площею основи $S(\xi_i)$, де $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$.



Тоді об'єм тіла наближено дорівнюватиме інтегральній сумі $V \approx \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$, а точне значення об'єму тіла подаватиметься границею

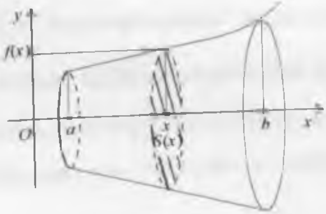
$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx,$$

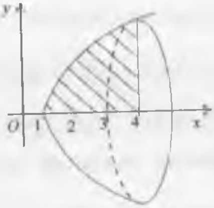
якщо ця границя існує.

Задача. Знайти об'єм тіла V_x, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y=f(x)\ge 0, y=0, x=a, x=b$.

Розглядаючи цю задачу, як частинний випадок попередньої задачі, встановлюємо, що площа поперечного перерізу $S(x)$ в даному випадку є площа круга радіусом $y=f(x)$, тобто $S(x)=\pi\cdot(f(x))^2$, а об'єм тіла обертання буде таким:

$$V_x = \int_a^b S(x)dx = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$$





Зауваження. Аналогічно, об'єм тіла V_y, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $x = 0$, $x = \varphi(y) \geq 0$, $y = c$, $y = d$ матиме вигляд

$$V_y = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 dy .$$

Приклад. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 = 3x - 3$, $x = 1$, $x = 4$.

$$V = \pi \int_1^4 y^2 dx = \pi \int_1^4 (3x - 3) dx = \frac{3\pi}{2}(x-1)^2 \Big|_1^4 = \frac{27}{2}\pi .$$

Контрольні питання.

1. Дати означення первісної.
2. Дати означення невизначеного інтегралу.
3. Які властивості має невизначений інтеграл?
4. Записати таблицю невизначених інтегралів.
5. Записати формулу інтегрування частинами.
6. Які класи функцій інтегруються частинами?
7. Метод інтегрування заміною змінної.
8. Інтегрування раціональних дробів.
9. Інтегрування тригонометричних функцій.
10. Дати означення визначеного інтеграла.
11. Які властивості має визначений інтеграл?
12. Записати формулу Ньютона – Лейбніца.

13. Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

14. Метод заміни змінної у визначеному інтегралі.

15. Застосування визначеного інтеграла для обчислення площ плоских фігур.

16. Застосування визначеного інтеграла для обчислення об'єму тіла.

Завдання для самостійної роботи.

1. Знайти невизначені интеграли.

1. $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}.$

2. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}{x-1}dx.$

5. $\int \frac{\ln^3(1-x)}{x-1}dx.$

6. $\int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1}dx.$

7. $\int \frac{\cos x dx}{\sin x+2}.$

8. $\int \frac{\cos x dx}{3-\sin^2 x}.$

9. $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4}dx.$

2. 3 4. $\int \frac{x}{2x^2+x+5}dx.$

1.

3. $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}}dx.$

4. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}}dx.$

1. $\int (x^2-x+1)\ln x dx.$

2. $\int x\ln(x^2+1)dx.$

3. $\int x\ln^2 x dx.$

4. $\int (x^2-4)\sin 5x dx.$

5. $\int \ln\frac{2-x}{2+x}dx.$

6. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx.$

1. $\int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx.$

2. $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx.$

3. $\int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx.$

4. $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx.$

15. $\int \frac{3-9x}{x^3-1}dx.$

16. $\int \frac{6-9x}{x^3+8}dx.$

2. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx.$

22. $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx.$

4. $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}}dx.$

24. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}.$

6. $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx.$

26. $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}dx.$

1. $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}.$

2. $\int \frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x}dx.$

3. $\int \frac{dx}{5\cos x+10\sin x}.$

4. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}.$

5. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}.$

6. $\int \frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}dx.$

7. $\int \frac{dx}{8\sin^2 x-16\sin x\cos x}.$

8. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}.$

9. $\int \frac{2\operatorname{tg}x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx.$

10. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx.$

11. $\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}.$

12. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-2}.$

19. $\int \frac{3\sin^3 x dx}{\cos^4 x}.$

20. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}.$

21. $\int \sin^3 6x dx.$

22. $\int \sin^4 2x dx.$

23. $\int \cos^3 4x dx.$

24. $\int \operatorname{tg}^4 3x dx.$

25. $\int \operatorname{tg}^3 x dx.$

26. $\int x\operatorname{tg}^2 x^2 dx.$

27. $\int \sin 3x\cos x dx.$

28. $\int \cos 2x\cos 3x dx.$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої вказаними лініями.

1. $y=x^2,\ y^2=x.$

2. $y=x^2,\ y=3-x.$

3. $y=\sqrt{x},\ y=x^3.$

4. $y=\sqrt{x},\ x+y=2,\ y=0.$

5. $x^2=2py,\ y^2=2px.$

6. $y=2-x^2,\ y^3=x^2.$

7. $y=\ln x,\ x=e,\ x=e^2,\ y=0.$

8. $y=x^2,\ y=3-2x.$

9. $y = 2x - x^2, \ y = -x.$ 10. $y = x^2, \ y = x^2/2, \ y = 2x.$

11. $y = e^x, \ y = e^{-x}, \ x = 1.$ 12. $xy = 2, \ y = 2x, \ y = x/2.$

3. Обчислити довжину дуги лінії.

1. $x = 2\cos^3 t, \ \ y = 2\sin^3 t.$

2. $x = 2(\cos t + t\sin t), \ \ y = 2(\sin t - t\cos t) \ \ (0 \le t \le \pi).$

3. $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{x\,a} + e^{-x\,a}\right) \ \ (0 \le x \le a).$

4. $y = \ln\sin x$ від $x = \pi/3$ до $x = \pi/2$.

5. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{9}.$

4.Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням плоскої фігури Φ навколо вказаної осі координат.

1. Φ: $y^2 = 4 - x, \ x = 0, \ Oy.$

2. Φ: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}, \ x = 0, \ y = 0, \ Ox.$

3. Φ: $x^2/9 + y^2/4 = 1, \ Oy.$

4. Φ: $y^3 = x^2, \ y = 1, \ Ox.$

5. Φ: $x = 6(t - \sin t), \ \ y = 6(1 - \cos t), \ Ox.$

6. Φ: $x = 3\cos^2 t, \ y = 4\sin^2 t \ \ (0 \le t \le \pi/2), \ Oy.$

7. Φ: $y^2 = x, \ x^2 = y, \ Ox.$

Використана література:

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. -М.: Высшая школа, 2000. Ч.1 - 304 с; Ч.2 – 360 с.
2. Єрмакова О. А. Вища математика: Навч. посіб. для дистанц. Форми навчання / За ред. В. М. Назаренка. – К.: Ун-т «Укрвїна», 2004. – 444 с.
3. Кремер Н.Ш. Математика в экономике. М.: Финстатинформ, 1999. – 470 с.
4. Латинін С.М.Вища математика: навч.-метод. рек. для практ. занять та організ. самост. роботи студ. за інтегр. формою навчання напряму підготовки 050503 – Машинобудування спеціалізація «Обладнання переробних і харчових виробництв» (у рамках ECTS) / С.М. Латинін. – Донецьк: ДонНУЕТ, 2012. – 97 с.
5. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – М.: Рольф, 2002. – 288 с., с ил.
6. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть. – М.: Рольф, 2002. – 256 с., с илл.
7. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 7-е изд. – М.: Айрис – пресс, 2008. – 576 с.: ил. – (Высшее образование).
8. Шипачев В.С. Высшая математика. -М.: Высшая школа, 1998. - 480 с.
9. Чубатюк В. М. Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей навчальних закладів III та IV рівнів акредитації. – К.: «Професіонал», 2006. – 432—с.
10. Долгіх В. М. Вища математика для економістів. Ч. 1. Алгебра та математичний аналіз [Текст] : навч. посібник для самостійного вивчення дисципліни : у 2 ч. / В. М. Долгіх, Т.І. Малютіна; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2009. – 97 с